

Chương trình Giảng dạy Kinh tế Fulbright
Học kỳ Xuân, 2015
PHÂN TÍCH TÀI CHÍNH

ĐÁP ÁN BÀI TẬP 3

Cổ phiếu	Suất sinh lợi kỳ vọng/năm, $E(r)$	Độ lệch chuẩn/năm, σ
A	$E(r_A) = 16\%$	$\sigma_A = 20\%$
B	$E(r_B) = 10\%$	$\sigma_B = 16\%$

Gọi ρ_{XY} là hệ số tương quan suất sinh lợi giữa A và B.

Tích sai suất sinh lợi giữa A và B: $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY}$

Danh mục P được thiết lập gồm A và B với trọng số tương ứng w_A và $w_B = 1 - w_A$.

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục đầu tư P:

$$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) = w_A E(r_A) + (1 - w_A) E(r_B) \quad (1)$$

Phương sai suất sinh lợi của danh mục P:

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + w_B^2 \sigma_B^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + w_B^2 \sigma_B^2 \quad (2)$$

Câu 1

(i) Trường hợp: $\rho_{XY} = 1$

$$\Rightarrow \sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B + w_B^2 \sigma_B^2 = (w_A \sigma_A + w_B \sigma_B)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_P = w_A \sigma_A + w_B \sigma_B = w_A \sigma_A + (1 - w_A) \sigma_B$$

$$\Rightarrow w_A = (\sigma_P - \sigma_B) / (\sigma_A - \sigma_B) \quad (3)$$

Thế vào (3) vào (1), ta có:

$$E(r_P) = (\sigma_P - \sigma_B) / (\sigma_A - \sigma_B) E(r_A) + [1 - (\sigma_P - \sigma_B) / (\sigma_A - \sigma_B)] E(r_B)$$

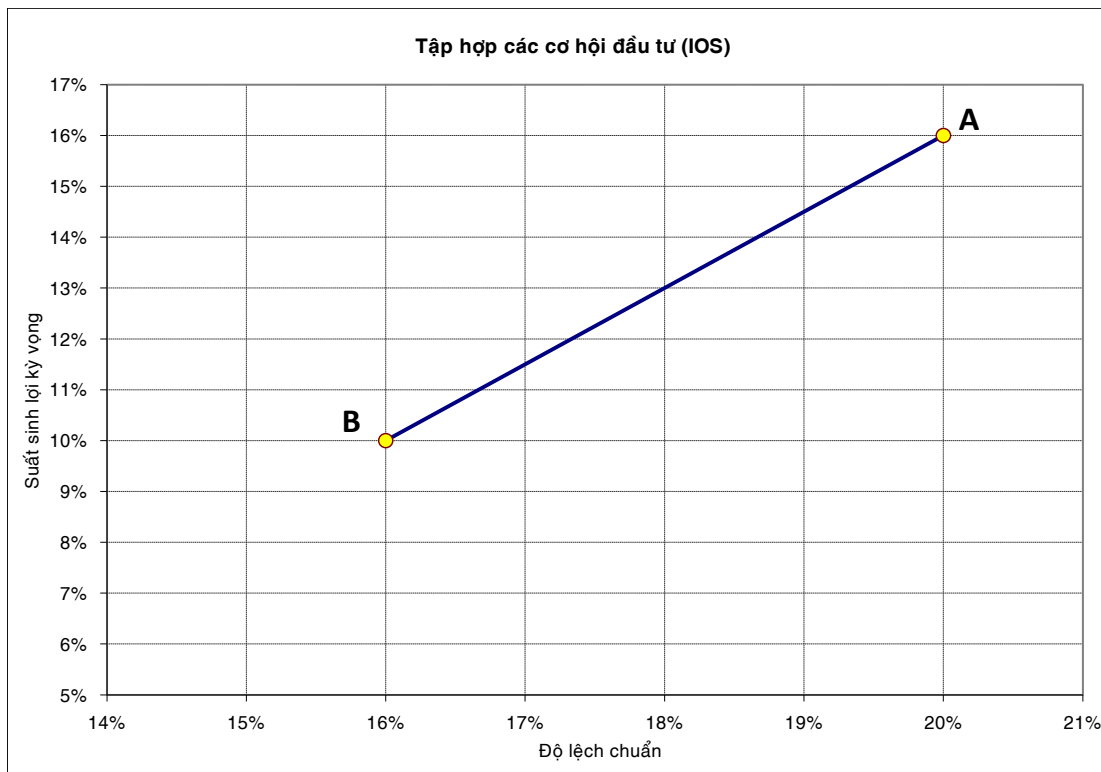
$$E(r_P) = (\sigma_P - \sigma_B) / (\sigma_A - \sigma_B) [E(r_A) - E(r_B)] + E(r_B) \quad (4)$$

(4) biểu diễn quan hệ tuyến tính đồng biến giữa suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn suất sinh lợi của danh mục P.

Ý nghĩa của mối quan hệ này là khi suất sinh lợi cổ phiếu A và B tương quan đồng biến hoàn hảo thì việc kết hợp 2 cổ phiếu này trong một danh mục đầu tư không mang lại lợi ích đa dạng hóa rủi ro.

Thay số vào (4), ta có:

$$E(r_P) = 1,5\sigma_P - 0,14$$



(ii) Trường hợp: $\rho_{XY} = -1$

$$\Rightarrow \sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 - 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B + w_B^2 \sigma_B^2 = (w_A \sigma_A - w_B \sigma_B)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_P = |w_A \sigma_A - w_B \sigma_B| = |w_A \sigma_A - (1 - w_A) \sigma_B|$$

Nếu $w_A \sigma_A \geq (1 - w_A) \sigma_B$, ta có:

$$w_A = (\sigma_P + \sigma_B) / (\sigma_A + \sigma_B) \quad (5)$$

Thế vào (5) vào (1), ta có:

$$E(r_P) = (\sigma_P + \sigma_B) / (\sigma_A + \sigma_B) [E(r_A) - E(r_B)] + E(r_B) \quad (6)$$

Nếu $w_A \sigma_A < (1 - w_A) \sigma_B$, ta có:

$$w_A = (\sigma_B - \sigma_P) / (\sigma_A + \sigma_B) \quad (7)$$

Thế vào (7) vào (1), ta có:

$$E(r_P) = (\sigma_B - \sigma_P) / (\sigma_A + \sigma_B) [E(r_A) - E(r_B)] + E(r_B) \quad (8)$$

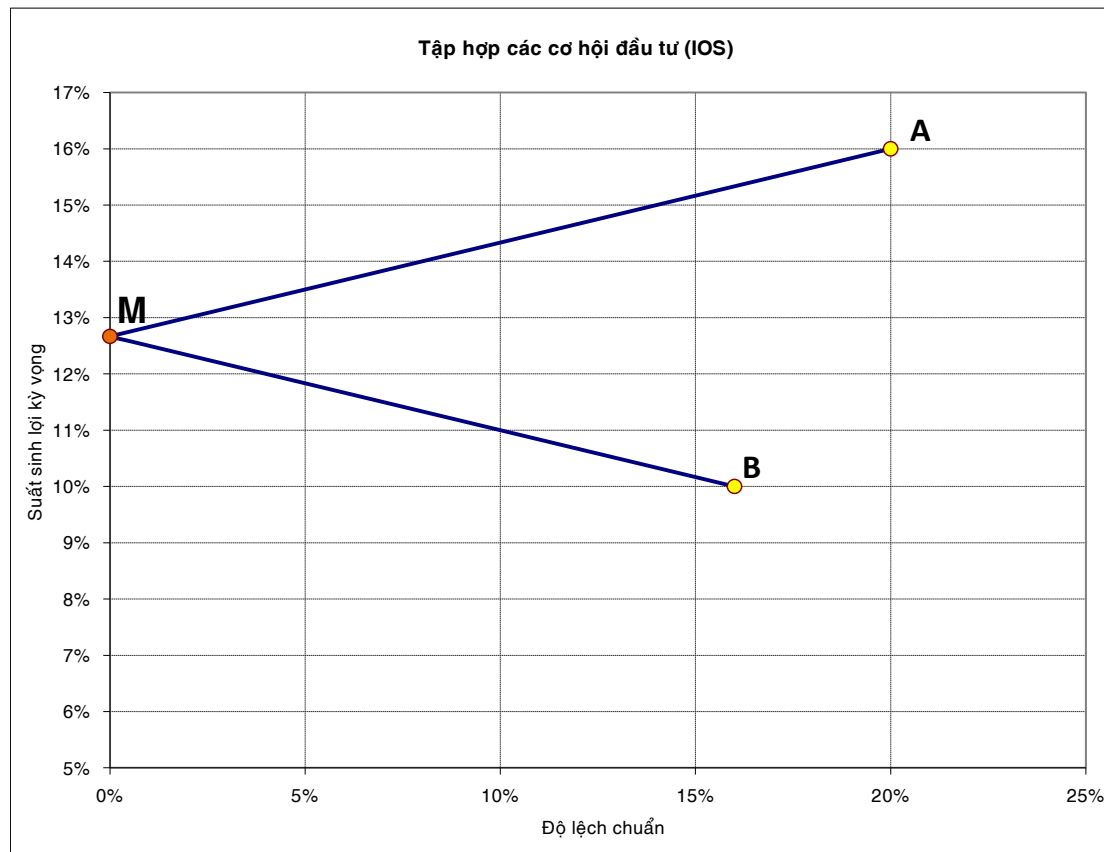
(6) và (8) biểu diễn mối quan hệ giữa suất sinh lợi kỳ vọng và độ lệch chuẩn suất sinh lợi của danh mục P theo một đường gãy khúc.

Ý nghĩa của mối quan hệ này là khi suất sinh lợi cổ phiếu A và B tương quan nghịch biến hoàn hảo thì việc kết hợp 2 cổ phiếu này trong một danh mục đầu tư mang lại khả năng đa dạng hóa rủi ro lớn nhất và có thể tạo mục danh mục đầu tư phi rủi ro.

Thay số vào (6) và (8), ta có:

Nếu $w_A \geq 4/9$, $E(r_P) = (\sigma_P + 0,76)/6$

Nếu $w_A < 4/9$, $E(r_P) = (0,76 - \sigma_P)/6$



M là danh mục đầu tư phi rủi ro nằm trên đường IOS với $\sigma_M = 0$.

Khi đó, $E(r_M) = 0,76/6 = 12,67\%$.

Danh mục M có cổ phiếu A với tỷ trọng $w_A^M = 4/9 = 44,44\%$ và cổ phiếu B với tỷ trọng $w_B^M = 1 - 4/9 = 55,56\%$.

Câu 2

Trường hợp: $\rho_{XY} = 0,4$

(i) IOS

Từ bài giảng 10, ta có đường IOS được biểu diễn bởi phương trình:

$$\sigma_p^2 = [B \cdot E(r_p)^2 - 2C \cdot E(r_p) + D]/E \quad (9)$$

với:

$$B = (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB})/(\sigma_A^2\sigma_B^2 - \sigma_{AB}^2) = 46,503$$

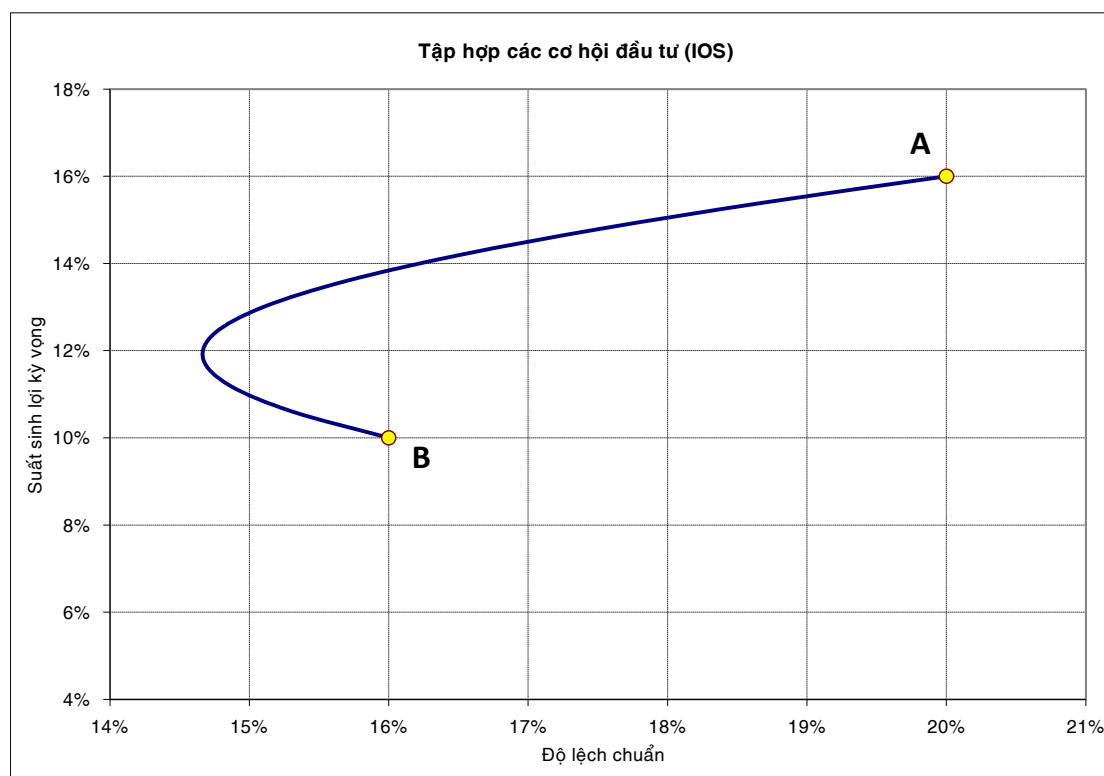
$$C = \{E(r_A)\sigma_B^2 + E(r_B)\sigma_A^2 - [E(r_A) + E(r_B)]\sigma_{AB}\}/(\sigma_A^2\sigma_B^2 - \sigma_{AB}^2) = 5,543$$

$$D = [E(r_A)^2\sigma_B^2 + E(r_B)^2\sigma_A^2 - 2E(r_A)E(r_B)\sigma_{AB}]/(\sigma_A^2\sigma_B^2 - \sigma_{AB}^2) = 0,751$$

$$E = BD - C^2 = 4,185$$

Phương trình đường IOS có dạng như sau:

$$\sigma_p^2 = 11,111 \cdot E(r_p)^2 - 2,649 \cdot E(r_p) + 0,179 \quad (10)$$



(ii) Đường phân bổ vốn đầu tư (CAL) ứng với lãi suất phi rủi ro $r_f = 5\%$

Nhà đầu tư sẽ chọn danh mục T_1 trên đường IOS sao cho đường CAL vừa đúng tiếp xúc với IOS tại T_1 , ứng với lãi suất phi rủi ro 5%. Vậy, tại điểm T_1 thì độ dốc của CAL (tức là hệ số Sharpe) có giá trị lớn nhất.

Cơ cấu của danh mục T_1 : $w_A^{T1} = x$ và $w_B^{T1} = 1 - x$.

$$E(r_t) = x \cdot E(r_A) + (1 - x) \cdot E(r_B) = [E(r_A) - E(r_B)]x + E(r_B)$$

$$\sigma_t^2 = x^2\sigma_A^2 + 2x(1-x)\sigma_{AB} + (1-x)^2\sigma_B^2 = (\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})x + \sigma_B^2$$

Độ dốc của đường CAL được biểu diễn bởi hệ số Sharpe:

$$S_t = \frac{[E(r_t) - r_f]}{\sigma_t} = \frac{[E(r_A) - E(r_B)]x + E(r_B) - r_f}{[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})x + \sigma_B^2]^{0,5}}$$

S_t đạt giá trị cực đại khi $\partial S_t / \partial x = 0$.

$$\Rightarrow [E(r_A) - E(r_B)][(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})x + \sigma_B^2]^{0,5} - \{[E(r_A) - E(r_B)]x + E(r_B) - r_f\}[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x - (\sigma_B^2 - \sigma_{AB})] [(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})x + \sigma_B^2]^{-0,5} = 0$$

$$\Rightarrow [E(r_A) - E(r_B)][(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})x + \sigma_B^2] - \{[E(r_A) - E(r_B)]x + E(r_B) - r_f\}[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)x - (\sigma_B^2 - \sigma_{AB})] = 0$$

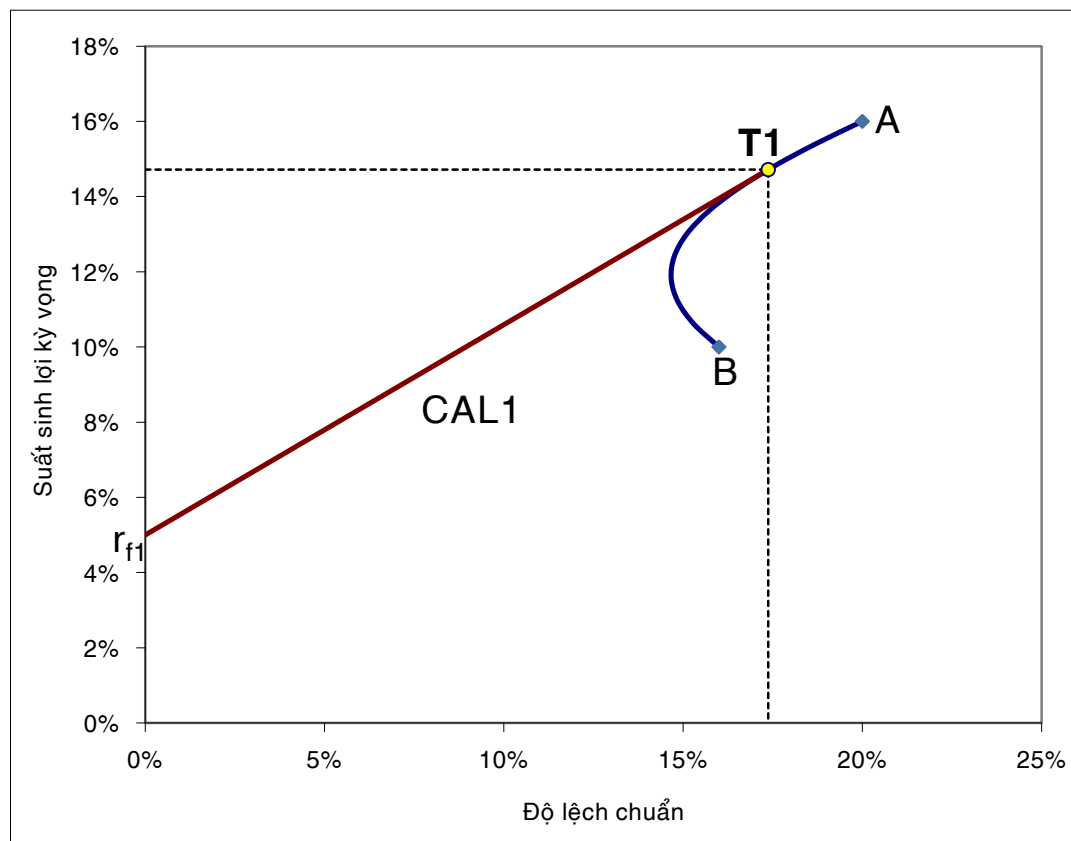
$$\Rightarrow \{[E(r_A) - E(r_B)](\sigma_B^2 - \sigma_{AB}) + [E(r_B) - r_f](\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)\}x = [E(r_A) - E(r_B)]\sigma_B^2 + [E(r_B) - r_f](\sigma_B^2 - \sigma_{AB})$$

$\Rightarrow$ Thay số, ta có: $x = 78,61\%$

Vậy danh mục T_1 gồm 78,61% cổ phiếu A và 21,39% cổ phiếu B.

$E(r_{T1}) = 14,72\%$ và $\sigma_{T1} = 17,38\%$.

Hệ số Sharpe: $S_{T1} = 0,5592$



Vì CAL_1 trong đồ thị trên ứng với trường hợp VC đầu tư phi rủi ro. Khi đó, trọng số đầu tư vào tài sản phi rủi ro phải lớn hơn hoặc bằng không. Vì vậy CAL là đoạn thẳng đi từ vị trí lãi suất phi rủi ro trên trục tung đến vị trí danh mục tiếp xúc T_1 .

(iii) Đường phân bổ vốn đầu tư (CAL) ứng với lãi suất phi rủi ro $r_f = 7\%$

Nhà đầu tư sẽ chọn danh mục T_2 trên đường IOS sao cho đường CAL vừa đúng tiếp xúc với IOS tại T_2 , ứng với lãi suất phi rủi ro 7%. Vậy, tại điểm T_2 thì độ dốc của CAL (tức là hệ số Sharpe) có giá trị lớn nhất.

Cơ cấu của danh mục T_2 : $w_A^{T_2} = y$ và $w_B^{T_2} = 1 - y$.

$$E(r_t) = y \cdot E(r_A) + (1 - y) \cdot E(r_B) = [E(r_A) - E(r_B)]y + E(r_B)$$

$$\sigma_t^2 = y^2 \sigma_A^2 + 2y(1 - y)\sigma_{AB} + (1 - y)^2 \sigma_B^2 = (\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})y + \sigma_B^2$$

Độ dốc của đường CAL được biểu diễn bởi hệ số Sharpe:

$$S_t = \frac{[E(r_t) - r_f]}{[\sigma_t]} = \frac{[E(r_A) - E(r_B)]y + E(r_B) - r_f}{[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})y + \sigma_B^2]^{0.5}}$$

S_t đạt giá trị cực đại khi $\partial S_t / \partial y = 0$.

$$\Rightarrow [E(r_A) - E(r_B)][(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})y + \sigma_B^2]^{0.5} - \{[E(r_A) - E(r_B)]y + E(r_B) - r_f\}[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y - (\sigma_B^2 - \sigma_{AB})] / [(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})y + \sigma_B^2]^{-0.5} = 0$$

$$\Rightarrow [E(r_A) - E(r_B)][(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y^2 - 2(\sigma_B^2 - \sigma_{AB})y + \sigma_B^2] - \{[E(r_A) - E(r_B)]y + E(r_B) - r_f\}[(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)y - (\sigma_B^2 - \sigma_{AB})] = 0$$

$$\Rightarrow \{[E(r_A) - E(r_B)](\sigma_B^2 - \sigma_{AB}) + [E(r_B) - r_f](\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)\}y = [E(r_A) - E(r_B)]\sigma_B^2 + [E(r_B) - r_f](\sigma_B^2 - \sigma_{AB})$$

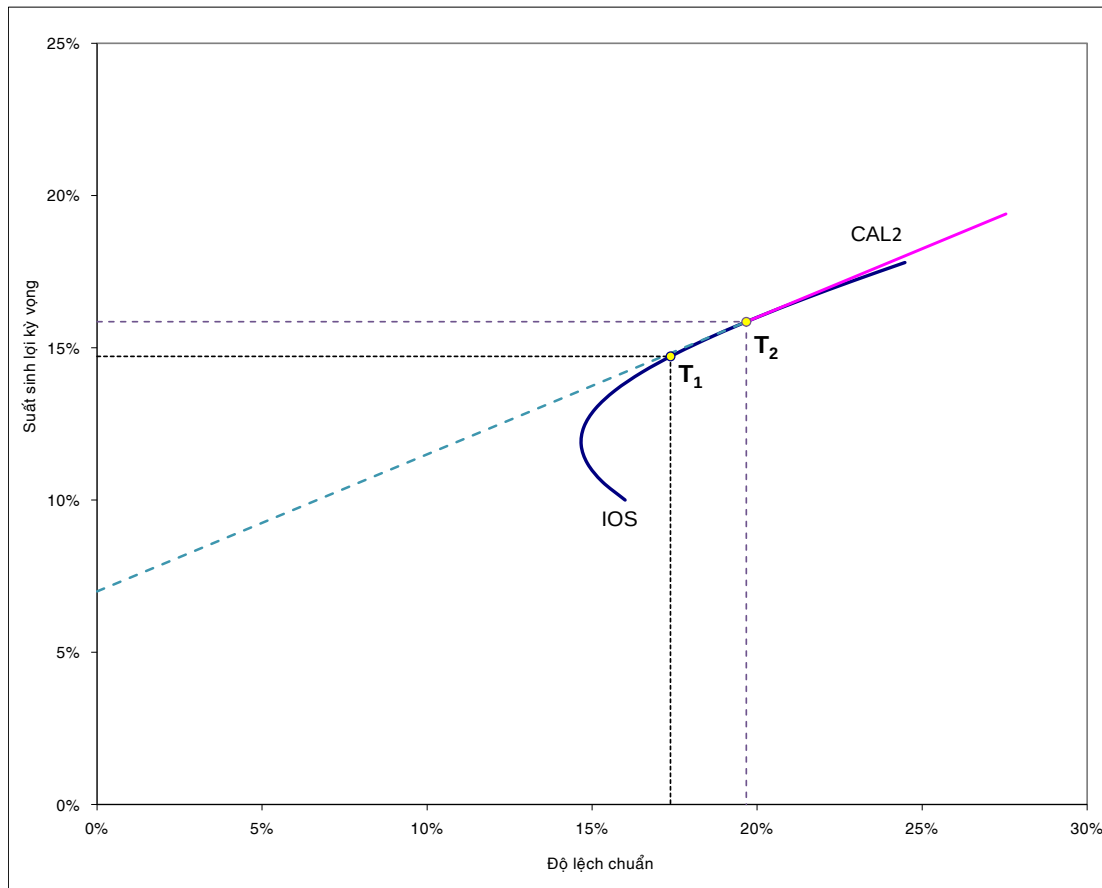
$\Rightarrow$ Thay số, ta có: $y = 97,56\%$

Vậy danh mục T_2 gồm 97,56% cổ phiếu A và 2,44% cổ phiếu B.

$$E(r_{t_2}) = 15,85\% \text{ và } \sigma_{t_2} = 19,67\%.$$

$$\text{Hệ số Sharpe: } S_{t_2} = 0,4501$$

Vì CAL_2 trong đồ thị trên ứng với trường hợp VC vay ngân hàng, tức là trọng số đầu tư vào tài sản phi rủi ro phải nhỏ hơn hoặc bằng không. Vì vậy CAL_2 là tia đi từ vị trí danh mục tiếp xúc T_2 lên phía trên.



(iv) Danh mục đầu tư tối ưu, E

Danh mục tối ưu (E) sẽ là tiếp điểm của U với một trong 3 đường CAL_1 , CAL_2 hay IOS sao cho VC đạt độ thỏa dụng cao nhất. Tại đây độ dốc của mỗi đường với (U) là bằng nhau.

Ta có độ dốc của đường đẳng dụng bằng $[dr_E/d\sigma_E]_U = A\sigma_E = 2\sigma_E$

Liệu E có nằm trên CAL_1 ?

Độ dốc của đường CAL_1 : $2\sigma_E = S_{T1} = 0,5592 \Rightarrow \sigma_E = 0,5592/2 = 27,96\%$

Trong cơ cấu danh mục E, gọi w_0 là tỷ lệ đầu tư vào tài sản phi rủi ro; $(1 - w_0)$ là tỷ lệ đầu tư vào danh mục tiếp xúc T_1 .

Ta có: $\sigma_E = (1 - w_0)\sigma_{T1} \Rightarrow w_0 = 1 - \sigma_E/\sigma_{T1} = 1 - 27,96\%/17,38\% = -60,9\% < 0$

Vì CAL_1 tương ứng với việc VC đầu tư vào tài sản phi rủi ro với trọng số không âm.

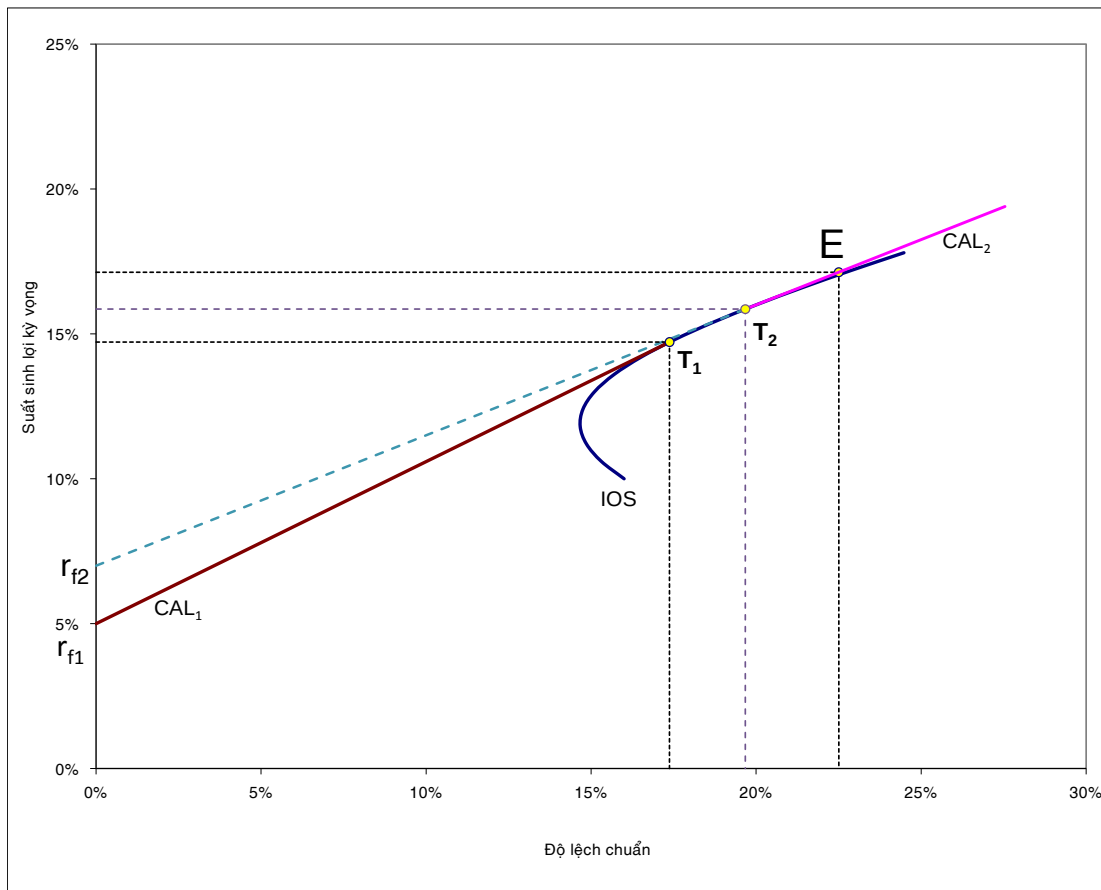
Vậy, E không thể nằm trên CAL_1 .

Liệu E có nằm trên CAL_2 ?

Độ dốc của đường CAL_2 : $2\sigma_E = S_{T2} = 0,4501 \Rightarrow \sigma_E = 0,4501/2 = 22,50\%$

Ta có: $\sigma_E = (1 - w_0)\sigma_{T2} \Rightarrow w_0 = 1 - \sigma_E/\sigma_{T2} = 1 - 22,50\%/19,67\% = -14,4\% < 0$

Vậy, E nằm trên CAL_2 tương ứng với việc VC đầu tư vay ngân hàng với tỷ trọng 14,4%.



Sau khi vay ngân hàng, VC có được số tiền bằng 114,4% vốn tự có để đầu tư vào danh mục T_2 theo tỷ trọng:

$$w_A = 114\% \cdot w_A^{t2} = 114,4\% \cdot 97,56\% = 111,61\%;$$

$$w_B = 114\% \cdot w_B^{t2} = 114,4\% \cdot 2,44\% = 2,79\%$$

Vậy để có danh mục E, VC đi vay ngân hàng số tiền bằng 14,4% vốn tự có, rồi đầu tư vào cổ phiếu A với giá trị bằng 111,61% vốn tự có và đầu tư vào cổ phiếu B với giá trị bằng 2,79% vốn tự có.