

Mô hình Xác suất (Limited Dependent Variables/Probability Model)

Lê Việt Phú
Trường Chính sách Công và Quản lý Fulbright

19-22/1/2021

Khái niệm biến phụ thuộc không bị giới hạn và bị giới hạn (Limited Dependent Variables)

- ▶ Các loại biến phụ thuộc trong mô hình hồi quy:
 - Liên tục và rời rạc: tăng trưởng GDP là liên tục, có thể có con số bất kỳ, ví dụ 6.1025%; số lần đi học muộn là rời rạc, ví dụ đi muộn 0, 1, 2 lần.
 - Không bị giới hạn và bị giới hạn: lợi nhuận của công ty là không giới hạn (lỗ thì nhận giá trị âm, lãi là dương); số nhân viên là bị giới hạn (bị chặn dưới, ít nhất 1 nhân viên trong một công ty).
 - Biến phụ thuộc định tính và định lượng: có hút thuốc lá hay không là biến định tính; hút bao nhiêu điếu thuốc một ngày là định lượng và bị giới hạn (ít nhất là một điếu).
- ▶ Hầu hết các biến số kinh tế đều bị giới hạn.
- ▶ Sử dụng hồi quy tuyến tính đối với dữ liệu bị giới hạn thì kết quả có thể bị sai lệch, hoặc khó giải thích ý nghĩa về mặt kinh tế.

Một số mô hình sử dụng biến phụ thuộc bị giới hạn

- ▶ Mô hình xác suất xảy ra một sự kiện hay một biến cố nào đó. Ví dụ đối tượng vị thành niên hút thuốc, đi học đại học, phụ nữ dân tộc thiểu số tham gia lao động chính thức. Biến phụ thuộc là có hoặc không (mã hoá 1 cho câu trả lời có, 0 cho câu trả lời không). Đối với biến phụ thuộc định tính thì không có cách xếp hạng câu trả lời (có/không) như biến phụ thuộc định lượng (nhiều/ít).
- ▶ Mô hình xác suất có thể là đa lựa chọn thay vì hai lựa chọn, ví dụ anh/chị đến trường bằng phương tiện gì: ô-tô, xe máy, xe đạp, đi bộ.

- ▶ Mô hình số lần xảy ra một sự kiện nào đó. Ví dụ số lần một học viên MPP đi học muộn, số con trong một gia đình, số sản phẩm bị hỏng trong một ngày, số lần đi khám bệnh một năm. Biến phụ thuộc sẽ có giá trị 0 và số nguyên dương (1, 2, 3...).
- ▶ Mô hình mô tả xếp hạng của một sự kiện, ví dụ cảm quan của anh/chị về một môn học có thể là quá khó/khó/trung bình/tương đối dễ/quá dễ.
- ▶ Mô hình với biến phụ thuộc bị chặn trên hoặc dưới. Ví dụ thu nhập chỉ có thể là 0 hoặc dương; số tiền một người đã làm từ thiện trong một năm tối thiểu là 0 hoặc dương; số giờ làm việc trong một tuần không thể quá $24 \times 7 = 168$ giờ.

Tên gọi mô hình sử dụng biến phụ thuộc có giới hạn

- ▶ **Mô hình xác suất (Logit, Probit, Multinomial Logit)**
- ▶ Mô hình số lần xảy ra sự kiện (Poisson)
- ▶ Mô hình với biến phụ thuộc bị chặn (Tobit, Censored/Truncated Regression) hoặc mô hình có vấn đề lựa chọn mẫu (Sample selection/Heckman correction model)

Điều gì xảy ra nếu sử dụng phương pháp OLS cùng các giả định của mô hình CLRM vào dữ liệu có biến phụ thuộc bị giới hạn?

Xem xét mô hình:

$$Smoking_i = \beta_0 + \beta_1 * Price_i + u_i \quad (1)$$

trong đó $Smoking_i$ là biến định tính cho hành vi hút thuốc lá của trẻ vị thành niên, nhận giá trị 1 nếu có hút thuốc và 0 nếu không. Biến giải thích là giá bán lẻ.

$$Smoking_i = \begin{cases} 1 & \text{smoker} \\ 0 & \text{non - smoker} \end{cases}$$

- ▶ Trong mô hình thông thường, β_1 là thay đổi của biến phụ thuộc $Smoking$ nếu biến giải thích $Price$ tăng một đơn vị.
- ▶ Đối với biến phụ thuộc nhị phân, $Smoking_i$ chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1, ý nghĩa của β_1 là gì?

Mô hình xác suất tuyến tính - Linear Probability Model (LPM)

- ▶ Với giả thiết kỳ vọng của sai số bằng 0, $E[u|Price] = 0$:

$$E[Smoking|Price] = \beta_0 + \beta_1 * Price \quad (2)$$

- ▶ Đồng thời:

$$\begin{aligned} E[Smoking] &= 1 * P(Smoking = 1) + 0 * P(Smoking = 0) \\ &= P(Smoking = 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$P(Smoking = 1|Price) = E[Smoking|Price] = \beta_0 + \beta_1 * Price$$

- ▶ Điều này có nghĩa là xác suất quan sát được một vị thành niên hút thuốc là mô hình tuyến tính của biến giải thích $Price$. Ví dụ $\beta_1 = -0.1$, nếu giá bán tăng 1 đơn vị thì xác suất vị thành niên hút thuốc sẽ giảm 10%.

Những vấn đề của mô hình xác suất tuyến tính

- ▶ Nếu $\beta_1 = -0.1$ thì tăng giá bán thêm 20 đơn vị có làm cho xác suất hút thuốc giảm về 0 hay thậm chí âm không?
- ▶ Tác động biên của giá bán là cố định có hợp lý không? Ví dụ nếu giá thuốc lá tăng từ 10.000đ lên 20.000đ/bao có khác so với tăng từ 100.000đ lên 110.000đ/bao không?
- ▶ Giả định về phương sai không đổi trong mô hình CLRM, $Var(u_i|X) = \sigma^2$, bị vi phạm.¹

$$Var(u_i|Price_i) = P_i * (1 - P_i) , \text{ với}$$

$$P_i = \beta_0 + \beta_1 * Price_i$$

Do $Var(u_i|Price_i)$ phụ thuộc vào $Price_i$, hay nói cách khác, phương sai của sai số trong mô hình LPM thay đổi.

¹Biến phụ thuộc Y_i phân phối Bernoulli với xác suất $P_i = \beta_0 + \beta_1 * X_i$ nên u_i cũng phân phối Bernoulli với xác suất $P_{u_i} = 1 - \beta_0 - \beta_1 * X_i$. Phương sai của phân phối Bernoulli là $Var(u_i) = P_{u_i} * (1 - P_{u_i})$.

Phương pháp xác suất tối đa - Maximum Likelihood Estimation (MLE)

- ▶ Khắc phục các nhược điểm đã nêu trên, để (a) ước lượng xác suất luôn nằm trong khoảng $[0,1]$ với mọi giá trị của biến giải thích $Price$, và (b) tác động biên của biến giải thích không cố định, chúng ta cần cách tiếp cận mới không sử dụng phương pháp OLS.
- ▶ Giả định xác suất của việc hút thuốc được xác định bởi hàm phân phối xác suất tích lũy $G(.)$:

$$P(Smoking_i = 1 | Price_i) = G(\beta_0 + \beta_1 * Price_i) \quad (3)$$

Với hàm $G(\beta_0 + \beta_1 * Price_i)$ nhận giá trị nằm trong khoảng $[0,1]$ với mọi giá trị của biến giải thích $Price$.

- ▶ Hàm phân phối xác suất tích lũy $G(.)$ dựa vào giả định hoặc các lý thuyết kinh tế để giải thích.

Các hàm phân phối xác suất thông dụng

- ▶ Nếu $G(\cdot)$ có phân phối tích lũy Logistic, khi đó ta có hồi quy "Logit":

$$G(z) = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

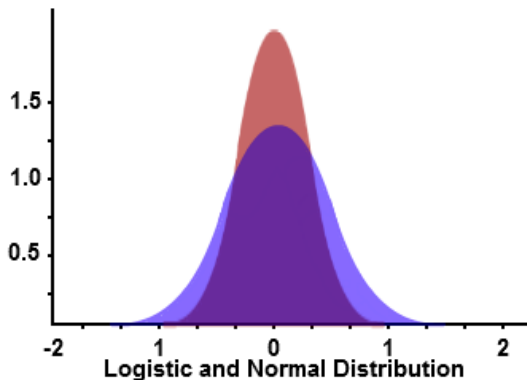
với hàm mật độ phân phối Logistic $g(z) = G'(z) = \frac{e^z}{(1+e^z)^2}$

- ▶ Nếu $G(\cdot)$ có phân phối tích lũy chuẩn $\Rightarrow$ hồi quy Probit:

$$G(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(x) dx$$

với hàm mật độ phân phối chuẩn $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Đồ thị hàm mật độ phân phối Logistic (màu tím) và phân phối chuẩn (màu cam)



Hàm Logistic có mức độ phân tán cao hơn so với phân phối chuẩn.

Ước lượng mô hình hồi quy Logit và Probit

- ▶ Khác với phương pháp sai số bình phương tối thiểu OLS, mô hình hồi quy dựa trên hàm phân phối xác suất như Logit hay Probit dùng phương pháp xác suất tối đa (Maximum Likelihood Estimation-MLE).
- ▶ Hàm mục tiêu của phương pháp OLS là tối thiểu tổng bình phương sai số của mô hình ($\sum u_i^2 \rightarrow \min$), còn hàm mục tiêu của phương pháp MLE là tối đa xác suất quan sát được mẫu với thuộc tính cho trước.
 - Giả dụ chúng ta có mẫu 1000 người, trong đó người thứ 1, 3, 7... có hút thuốc, người 2, 4, 5, 6, 8... không hút.
 - Chúng ta cần xây dựng hàm số dự báo xác suất hành vi hút thuốc.
 - Phương pháp MLE ước lượng các tham số của hàm số này sao cho xác suất quan sát được nhóm người trên thực tế có và không hút thuốc là chính xác nhất.

Xác suất quan sát được vị thành niên i có hút thuốc hay không có thể viết như sau:

$$P(\text{Smoking}_i | \text{Price}_i) = [G(.)]^{\text{Smoking}_i} \times [1 - G(.)]^{1 - \text{Smoking}_i} \quad (4)$$

- Nếu $\text{Smoking}_i = 1$ thì $P(\text{Smoking}_i | \text{Price}_i) = G(.)$
- Nếu $\text{Smoking}_i = 0$ thì $P(\text{Smoking}_i | \text{Price}_i) = 1 - G(.)$

Phương pháp MLE ước lượng các tham số của hàm xác suất $G(.)$ bằng cách **tối đa hóa tích của xác suất dự báo đúng những người hút thuốc và không hút thuốc**:

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathbf{P}_{MLE} &= \prod_{i=1}^N P(\text{Smoking}_i | \text{Price}_i) \\ &= \prod_{i=1}^N [G(.)]^{\text{Smoking}_i} \times [1 - G(.)]^{1 - \text{Smoking}_i} \end{aligned} \quad (5)$$

Do $G(.)$ là hàm đơn điệu (hàm phân phối xác suất tích lũy chỉ tăng hoặc giảm theo biến giải thích), chúng ta có thể đơn giản hàm tối ưu tích (5) sang hàm tối ưu tổng bằng cách lấy logarithm và tối đa giá trị log-likelihood $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathbf{L}_{MLE} &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\left\{ S_i * \ln[G(.)] + [1 - S_i] * \ln[1 - G(.)] \right\}}_{\ell_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \ell_i \end{aligned} \quad (6)$$

với S_i là tình trạng hút thuốc, $Smoking_i$, và $G(.)$ là hàm phân phối xác suất tích lũy $G(\beta_0 + \beta_1 * Price_i)$.

Để ước lượng tham số β_0 và β_1 nhằm tối đa giá trị $\mathbf{L}$, sử dụng điều kiện đạo hàm bậc nhất (first-order condition):

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_0} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_1} = 0 \quad (8)$$

Lưu ý quy tắc chuỗi (chain-rule) khi lấy đạo hàm của hàm hợp, $G(\beta_0 + \beta_1 * X_i)$ là hàm xác suất tích lũy, $g(.)$ là hàm mật độ phân phối xác suất:

$$\frac{\partial G(\beta_0 + \beta_1 * X_i)}{\partial \beta_0} = g(\beta_0 + \beta_1 * X_i)$$

$$\frac{\partial G(\beta_0 + \beta_1 * X_i)}{\partial \beta_1} = g(\beta_0 + \beta_1 * X_i) * X_i$$

$$\frac{\partial \ln[G(.)]}{\partial \beta_0} = \frac{1}{G(.)} * g(.)$$

$$\frac{\partial \ln[G(.)]}{\partial \beta_1} = \frac{1}{G(.)} * g(.) * X_i$$

Thay vào công thức (7-8) chúng ta có điều kiện bậc nhất như sau:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_0} = \sum_i \left\{ S_i * g(.) - [1 - S_i] * \frac{1}{1 - G(.)} * g(.) \right\} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_1} = \sum_i \left\{ \frac{S_i}{G(.)} * g(.) * X_i - [1 - S_i] * \frac{1}{1 - G(.)} * g(.) * X_i \right\} = 0 \quad (10)$$

Với hồi quy Logit, $G(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$ và $g(z) = \frac{e^z}{(1+e^z)^2}$, sau khi biến đổi, điều kiện bậc nhất đơn giản hóa thành:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_0} = \sum_i S_i - \sum_i \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 * X_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 * X_i}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta_1} = \sum_i S_i * X_i - \sum_i \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 * X_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 * X_i}} * X_i = 0 \quad (12)$$

Chúng ta có hai phương trình và hai ẩn số, do đó có thể tìm được các giá trị nghiệm số $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$.

Tuy nhiên...

- ▶ Trong phương pháp MLE, do tính phi tuyến của điều kiện bậc nhất (11) và (12) nên không có công thức cụ thể để tính $\hat{\beta}_0$ và $\hat{\beta}_1$ như phương pháp OLS.
- ▶ Việc ước lượng $\hat{\beta}_0$ và $\hat{\beta}_1$ phải sử dụng phương pháp số (numerical solution) bằng các phần mềm chuyên dụng.
- ▶ Với hàm Probit thì phương pháp ước lượng cũng tương tự.

Giải thích ý nghĩa của mô hình Logit và Probit

- ▶ Từ giả định xác suất của hành vi hút thuốc (3):

$$P(\text{Smoking}_i = 1 | \text{Price}_i) = G(\beta_0 + \beta_1 * \text{Price}_i) \quad (13)$$

Với những thay đổi nhỏ của giá bán lẻ Price thì tác động biên lên xác suất hút thuốc có thể được tính như sau:

$$\frac{\partial P(\text{Smoking})}{\partial \text{Price}} = g(\beta_0 + \beta_1 * \text{Price}_i) * \beta_1 \quad (14)$$

với $g(\beta_0 + \beta_1 * \text{Price}_i)$ là hàm mật độ phân phối xác suất, tính tại giá trị Price_i .

- ▶ Trong phương pháp MLE, tác động biên của giá lên hành vi hút thuốc thay đổi tùy thuộc vào giá trị của hàm mật độ $g(\cdot)$ tại giá bán gốc.
- ▶ Tác động biên là cố định trong phương pháp hồi quy xác suất tuyến tính (LPM)!

- ▶ Thông thường chúng ta tính tác động biên tại mức giá trung bình, tại các tứ phân vị, tại các giá trị tối đa/tối thiểu của các biến giải thích.
- ▶ Nếu biến giải thích là biến rời rạc (ví dụ có thêm biến giới tính hay số con trong gia đình trong hồi quy Logit đa biến) thì không áp dụng được công thức (14). Khi này, tác động của giới tính đến hành vi hút thuốc phải ước lượng trực tiếp từ công thức (13):

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(\textit{Smoking}|\textit{Male}) - P(\textit{Smoking}|\textit{Female}) \\ &= G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price} + \sigma D) - G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price}) \quad (15)\end{aligned}$$

với σ là tham số của biến giới tính D .

So sánh giữa LPM, Logit và Probit

Sử dụng bộ dữ liệu mô phỏng SMOKE.dta

Regression Results

	LPM b/se	Logit b/se	Probit b/se
main			
sex	0.0050 (0.0526)	0.0214 (0.2227)	0.0132 (0.1377)
price	-0.0028 (0.0036)	-0.0116 (0.0152)	-0.0072 (0.0094)
Constant	0.5461* (0.2270)	0.2082 (0.9530)	0.1263 (0.5910)
N	807	807	807

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

Lưu ý trị kiểm định của mô hình LPM là t-test, của mô hình Logit hoặc Probit là z-test.

Diễn giải mô hình LPM

$$\widehat{Smoke}_i = .5461 + .0050 * sex_i - .0028 * price_i$$

- ▶ Đối tượng là nam giới có xác suất hút thuốc lá cao hơn nữ giới là 0.5%. Giá thuốc lá tăng 1 đơn vị (cent) làm giảm xác suất hút thuốc 0.28%.
- ▶ Tác động biên là hằng số, không phụ thuộc vào giá bán gốc.

Diễn giải Logistic regression

$$G(z) = \frac{e^z}{1 + e^z} \Rightarrow \frac{G(z)}{1 - G(z)} = e^z$$
$$\Rightarrow \log \left(\frac{G(z)}{1 - G(z)} \right) = z$$

Phương trình hồi quy logit được viết dưới dạng log của tỷ lệ thành công (odds ratio - OR²):

$$\log \left(\frac{\widehat{Smoke}_i}{1 - \widehat{Smoke}_i} \right) = .2082 + .0214 * sex_i - .0116 * price_i$$

²OR là tỷ số của xác suất xảy ra một sự kiện cho xác suất không xảy ra sự kiện đó. $OR = 1$ khi biến cố xảy ra hay không có xác suất như nhau. $OR > 1$ khi xác suất xảy ra cao hơn khả năng không xảy ra, và ngược lại.

Diễn giải tham số của logistic regression qua tỷ lệ thành công (OR)

Đối tượng là nam giới làm tăng OR hành vi hút thuốc thêm 0.0214. Giá tăng một đơn vị làm giảm OR hành vi hút thuốc là 0.0116.

Diễn giải tham số của logistic regression qua tác động biên (marginal effects)

Chuyển đổi các tham số thành tác động biên lên xác suất hút thuốc bằng công thức (14) cho biến liên tục và (15) cho biến rời rạc.

- ▶ Tác động của việc tăng một đơn vị của biến giải thích X lên xác suất xảy ra Y là bao nhiêu?
- ▶ Có sự khác biệt nào giữa các nhóm (ví dụ, nam giới và nữ giới) đối với hành vi Y ?

Ví dụ đối với biến giá (biến liên tục)

Giả định chúng ta muốn ước lượng tác động biên của việc tăng giá lên đối tượng là nam giới ($sex = 1$), tại mức giá trung bình ($price = 60.03$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(SMOKE)}{\partial price} &= g(.) * \beta_{price} = \frac{e^z}{(1 + e^z)^2} * \beta_{price} \\ &= \frac{e^{(.0214 - .0116 * 60.03 + .2082)}}{(1 + e^{(.0214 - .0116 * 60.03 + .2082)})^2} * (-.0116) \\ &= -.0027451\end{aligned}$$

⇒ tăng giá thuốc lá 1 cent/bao từ mức giá trung bình làm giảm xác suất hút thuốc là 0.27% với đối tượng là nam.

Homework: Nếu mức giá gốc lần lượt là 44 cent/bao và 70 cent/bao thì tác động biên là bao nhiêu?

Đối với biến rời rạc

Giả định chúng ta muốn ước lượng sự khác biệt của xác suất hút thuốc giữa hai nhóm nam và nữ, tại mức giá trung bình ($price = 60.03$):

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(\textit{Smoking}|\textit{Male}) - P(\textit{Smoking}|\textit{Female}) \\ &= G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price} + \sigma D) - G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price})\end{aligned}$$

Hàm phân phối tích lũy Logit là $G(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$,

$$\Delta P = .0050433 \approx 0.5\%$$

Diễn giải Probit regression

$$\widehat{Smoke}_i = \widehat{\Phi}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(0.1263 + 0.0132 * sex_i - 0.0072 * price_i)^2}{2}} dx$$

- ▶ Khó diễn giải trực tiếp tham số của mô hình Probit!!
- ▶ Có thể sử dụng công thức (14) hoặc (15) để ước tính tác động của các biến số giải thích lên hành vi hút thuốc tại các giá trị cho trước.

Với biến liên tục

Ước lượng tác động biên đối với mô hình Probit, với đối tượng là nam giới, tại mức giá trung bình:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\text{SMOKE})}{\partial \text{price}} &= g(.) * \beta_{\text{price}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} * \beta_{\text{price}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(0.0132 - .0072 * 60.03 + .1263)^2}{2}} * (-.0072) \\ &= -.0027423\end{aligned}$$

⇒ tăng giá thuốc lá 1 cent/bao từ mức giá trung bình làm giảm xác suất hút thuốc là .27% với đối tượng là nam.

Homework: Nếu mức giá gốc lần lượt là 44 cent/bao và 70 cent/bao thì tác động biên là bao nhiêu?

Với biến rời rạc

- ▶ Khác biệt về xác suất hút thuốc giữa nhóm nam và nữ như thế nào, tại mức giá trung bình?

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(\textit{Smoking}|\textit{Male}) - P(\textit{Smoking}|\textit{Female}) \\ &= G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price} + \sigma D) - G(\beta_0 + \beta_1 * \textit{Price})\end{aligned}$$

- ▶ Hàm phân phối chuẩn (Probit) là $G(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

$$\Delta P = .0050428 \approx 0.5\%$$

Đánh giá mô hình xác suất

- ▶ Khả năng dự báo của mô hình: thể hiện xác suất mô hình dự đoán đúng thực tế, bao gồm cả dự báo đúng hành vi hút thuốc và không hút thuốc.
- ▶ Một dự báo được coi là đúng nếu xác suất hút thuốc ước lượng được > 0.5 đối với người có hút thuốc, và xác suất không hút thuốc ước lượng được < 0.5 đối với người không hút thuốc.

Ma trận dự báo

		Dự báo		Tổng số
Thực tế	Có	Có	Không	X1 + X2
		X1 [Đúng]	X2 [Sai]	
	Không	X3 [Sai]	X4 [Đúng]	X3 + X4
Tổng số		X1 + X3	X2 + X4	$\sum X_i$

- ▶ Khả năng dự báo của mô hình $\gamma = \frac{X_1 + X_4}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$

Ma trận dự báo

	Thực tế			Tổng số
		Có	Không	
Dự báo	Có	0	0	0
	Không	310	497	807
Tổng số		310	497	807

► $\gamma = \frac{(0+497)}{807} = 61.59\%$

Thực hiện trong Stata:

```
. estat classification
```

Logistic model for SMOKE

Classified	True		Total
	D	~D	
+	0	0	0
-	310	497	807
Total	310	497	807

Kiểm định hồi quy Logit

- ▶ Đối với kiểm định đơn biến, sử dụng z-test.
- ▶ Đối với kiểm định đa biến, sử dụng kiểm định Likelihood Ratio (LR). Ví dụ kiểm định k tham số ước lượng đồng thời không có ý nghĩa thống kê:
 - $H_0 : \beta_i = \dots = \beta_k = 0$
 - $H_1 : \text{Ít nhất một } \beta_j \neq 0$

Các bước kiểm định LR

1. Ước lượng hai mô hình riêng biệt: mô hình không giới hạn (unrestricted, u) với đầy đủ biến giải thích, và mô hình giới hạn (restricted, r) không có biến giải thích $X_1, \dots, X_k$.
2. Tính trị kiểm định $LR = 2 * (\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_r)$, với $\mathbf{L}_u$ và $\mathbf{L}_r$ là giá trị log-likelihood từ công thức (6) và tương ứng với mô hình không giới hạn và mô hình giới hạn.³
3. LR có phân phối χ_k^2 với số bậc tự do k .
4. Bác bỏ giả thuyết $H_0 \Rightarrow$ ít nhất một trong các tham số kiểm định $\beta_j \neq 0$.

Thực hành trên Stata với bộ dữ liệu SMOKE.dta.

³Cơ chế của kiểm định đa biến LR trong phương pháp MLE tương đồng với kiểm định F trong phương pháp OLS. Khi áp ràng buộc vào mô hình MLE thì xác suất tối ưu bị giảm, khiến $\mathbf{L}_r < \mathbf{L}_u$, hoặc tổng bình phương sai số của mô hình OLS tăng, $SSR_r > SSR_u$.