CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐỊNH LƯỢNG 1

LỜI GIẢI GỢI Ý BÀI TẬP 1

Ngày phát: 02/11/2023

Hạn nộp: 8h20, 07/11/2023

Bài làm được yêu cầu chỉ nộp bản điện tử trên Microsoft Teams

----

Câu 1: Thảy một xúc xắc 6 mặt hai lần liên tiếp, hãy trả lời những câu hỏi sau:

a. Tính tổng số mặt của hai lần thảy. Không gian mẫu có bao nhiêu kết quả?

Tổng số nút của hai lần thảy dao động từ 2 đến 12 (11 trường hợp có khả năng xảy ra)

Không gian mẫu mỗi lần thảy là $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, như vậy hai lần thảy thì không gian mẫu có 36 kết quả.

b. Xác suất tổng hai lần thảy đạt tổng 2 và đạt tổng 8.

Gọi A là biến cố tổng hai lần thảy đạt tổng 2, chỉ có 1 trường hợp thỏa mãn là mặt 1 và mặt 1

$$P(A) = \frac{1}{36}$$

Gọi B là biến cố tổng hai lần thảy đạt tổng 8, các trường hợp thỏa mãn là (2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4):

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

Gọi C là biến cố tổng hai lần thảy đạt tổng 2 và đạt tổng 8:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$$

c. Xác suất xảy ra tổng là 6 nếu bạn đã biết số 1 đã xảy ra lần đầu.

Gọi D là biến cố tổng hai lần thảy là 6, các trường hợp xảy ra là: (1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2), (3; 3)

Gọi E là biến cố lần đầu thảy ra số 1, các trường hợp xảy ra là (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6):

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

Xác suất xảy ra tổng là 6 nếu lần đầu thảy ra số 1 là:

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

d. Xác suất xảy ra cho biến cố tổng là 5 nếu biết số 6 đã xảy ra ở lần đầu? Bạn có kết luận gì về hai biến cố này.

Gọi F là biến cố tổng hai lần thảy là 5, các trường hợp xảy ra là: (1; 4), (4; 1), (2; 3), (3; 2)

Gọi G là biến cố lần đầu thảy ra số 6, các trường hợp xảy ra là (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)

$$P(G) = \frac{1}{6}$$

Xác suất xảy ra tổng là 6 nếu lần đầu thảy ra số 1 là:

$$P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{0}{1/6} = 0$$

→ Biến cố F và biến cố G là hai biến cố xung khắc do $P(F \cap G) = 0$

Câu 2:

a. Giải thích ngắn gọn cách bạn hiểu về một biến ngẫu nhiên.

Biến ngẫu nhiên là một hàm số (ánh xạ) các biến cố tới các số, bản chất là gán các giá trị cho các thành phần trong tập hợp không gian mẫu của một phép thử ngẫu nhiên

b. Tung một xúc xắc 6 mặt và một đồng xu cùng một lúc. Bạn hãy mô tả ra biến ngẫu nhiên hình thành từ phép thử này.

Tung một xúc xắc có 6 khả năng xảy ra: các nút $1, 2, 3, 4, 5, 6$

Tung một đồng xu có 2 khả năng xảy ra: mặt sấp, mặt ngửa (S, N)

Không gian mẫu của biến ngẫu nhiên này có 12 kết quả bao gồm: $(1; S), (1; N), (2; S), (2; N), (3; S), (3; N), (4; S), (4; N), (5; S), (5; N), (6; S), (6; N)$

Nếu chúng ta ánh xạ gán các giá trị của các kết quả trong gian mẫu lần lượt là $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120$

Đây là một phân phối xác suất rời rạc và có thể được biểu diễn trong bảng sau:

X	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$P(X)$	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Câu 3: Kinh nghiệm cho thấy, số lượng giao dịch được của một văn phòng công ty BĐS trong một ngày là một biến ngẫu nhiên X có phân phối xác suất rời rạc theo bảng sau:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.15	0.05

a. Tính giá trị kì vọng $E(X)$, phương sai $Var(X)$, độ lệch chuẩn σ, giá trị median và mode của của số lượng giao dịch.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0 * 0.1 + 1 * 0.2 + 2 * 0.2 + 3 * 0.3 + 4 * 0.15 + 5 * 0.05 = 2.35$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i) = 1.8275$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.8275} = 1.352$$

Median là 2.5

Mode là 3 do có xác suất lớn nhất

b (*). Tính hàm xác suất phân phối tích lũy (c.d.f.) của X: $F(x) = P(X \leq x)$.

X	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0.1	0.3	0.5	0.8	0.95	1

Câu 4: Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối $X \sim N(3, 9)$ tính giá trị xác suất cho các trường hợp sau:

Từ dữ kiện của đề bài, ta có $\mu = 3$ và $\sigma^2 = 9 \rightarrow \sigma = 3$

a. $\mathrm{P}(X < 0)$

Tại $x = 0$, ta có: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{0-3}{3} = -1$

Ta có $\mathrm{P}(X < 0) = P(Z < -1) = NORM.S.DIST(-1,1) = 0.1586$

b. $\mathrm{P}(2 < X < 5)$

Tại $x = 2$, ta có: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{2-3}{3} = -0.333$

Tại $x = 5$, ta có: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{5-3}{3} = 0.666$

Ta có: $\mathrm{P}(2 < X < 5) = P(-0.333 < Z < 0.666) = P(Z < 0.666) - P(Z < -0.333)$

$= NORM.S.DIST(0.666,1) - NORM.S.DIST(-0.333,1) = 0.7475 - 0.3694 = 0.378$

c. $\mathrm{P}(X < 1)$ kết hợp với $\mathrm{P}(X > 4)$

Tại $x = 1$, ta có: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1-3}{3} = -0.666$

Tại $x = 4$, ta có: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{4-3}{3} = 0.333$

Ta có: $\mathrm{P}(X < 1) \cup P(X > 4) = P(Z < -0.666) \cup P(Z > 0.333)$
$= P(Z < -0.666) + [1 - P(Z \leq 0.333)]$
$= NORM.S.DIST(-0.666,1) + \left(1 - NORM.S.DIST(0.333,1)\right)$
$= 0.2525 + (1 - 0.6306) = 0.6219$

Câu 5 (*): Chứng minh phân phối binomial có giá trị kì vọng $\mathrm{E}(X) = np$ và phương sai $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. Gợi ý: dựa vào tính chất của $\mathrm{E}(X)$ và $\mathrm{Var}(X)$.

Mỗi lần thử X_i trên n lần có phân phối xác suất như sau:

$X_i = x$	0	1
$P(X_i = x)$	$1-p$	p

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0 * (1-p) + 1 * p = p$$
$$Var(X_i) = (0-p)^2 * (1-p) + (1-p)^2 * p = p(1-p)$$

Ta có, biến ngẫu nhiên binomial $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Áp dụng $\mathrm{E}(X_i + X_j) = \mathrm{E}(X_i) + \mathrm{E}(X_j)$ nên khi phép thử lặp lại n lần X_i, thì giá trị kỳ vọng là $E(X) = nE(X) = np$.

Áp dụng $\mathrm{Var}(X_i + X_j) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(X_j)$ khi X_i và X_j độc lập nhau, ta có $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$.

Chú ý: $\mathrm{Var}(X_i + X_j) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(X_j) + 2\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ khi biết X_i và X_j có độc lập nhau hay không

---HẾT---