CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐỊNH LƯỢNG 1
BÀI TẬP 2
Lời giải gợi ý

Câu 1. Trong một nghiên cứu nhằm tìm hiểu nguyên nhân khách hàng không hoàn tất các giao dịch mua sắm trực tuyến, hai lý do được nhiều khách hàng đưa ra bao gồm "*trang web tải quá chậm*" và "*trang web khó hiểu, tôi không thể tìm thấy sản phẩm cần mua*". Các trả lời của khách hàng tham gia nghiên cứu này cho thấy thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến là 5,4 phút với độ lệch chuẩn 2,9 phút. Giả sử rằng có 85 khách hàng tham gia trả lời khảo sát của nghiên cứu trên.

a) Anh/chị có cho rằng việc dùng phân phối chuẩn để ước lượng khoảng tin cậy của thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến là phù hợp không? Vì sao?

Việc dùng phân phối chuẩn để ước lượng khoảng tin cậy của thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến là phù hợp vì: (1) số khách hàng tham gia trả lời khảo sát của nghiên cứu trên là đủ lớn (n=85); (2) thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến là biến liên tục nên có thể sử dụng các thông số thu được từ mẫu tuân theo phân phối chuẩn, trong đó: giá trị trung bình mẫu (các giao dịch từ 85 khách hàng) xấp xỉ bằng giá trị trung bình của tổng thể (toàn bộ các giao dịch), độ lệch chuẩn của mẫu bằng độ lệch chuẩn của tổng thể chia cho căn bậc 2 của cỡ mẫu.

b) Anh/chị xây dựng khoảng tin cậy 98% của thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến.

Với $\alpha = 2\% \rightarrow Z_{\alpha/2} = NORMSINV(0{,}99) = 2{,}3263$

Khoảng tin cậy 98% của thời gian trung bình để hoàn tất một giao dịch mua sắm trực tuyến là:

$\mu \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 5{,}4 \pm 2{,}3263 \times \sqrt{\frac{2{,}9^2}{85}} = [4{,}668; 6{,}1317]$ (phút)

Câu 2. Giả sử anh/chị được yêu cầu thiết kế một khảo sát để đánh giá mức chênh lệch điểm trung bình cuối học kỳ của hai nhóm học viên. Độ chính xác của việc ước lượng mức chênh lệch điểm này được yêu cầu là dưới 0,2 điểm, với độ tin cậy 95%. Giả sử rằng hai nhóm khảo sát có số học viên bằng nhau, và rằng độ lệch chuẩn của điểm từ hai nhóm là xấp xỉ nhau và bằng 0,75 điểm. Anh/chị cần khảo sát bao nhiêu học viên trong mỗi nhóm?

Giả sử mức chênh lệch điểm trung bình cuối học kỳ của hai nhóm học viên tuân theo phân phối chuẩn. Để độ chính xác của việc ước lượng mức chênh lệch điểm này được yêu cầu là dưới 0,2 điểm, với độ tin cậy 95%, đồng nghĩa với biên sai số (margin of error) bằng 0,2.

Ta có: $Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 0{,}2$

Với độ tin cậy 95%, ta có $Z_{\frac{\alpha}{2}} = NORMSINV(0{,}975) = 1{,}96$ và $s_1 = s_2 = 0{,}75, n_1 = n_2$

$$\rightarrow 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}75^2}{n_1} + \frac{0{,}75^2}{n_2}} \leq 0{,}2 \rightarrow n \geq 108{,}045$$

Như vậy cần khảo sát ít nhất 109 học viên trong mỗi nhóm để đạt được mục tiêu trên

---

Học viên có thể lập luận theo hướng phân phối t khi chưa xác định được cỡ mẫu. Vì độ lệch chuẩn của điểm từ hai nhóm là xấp xỉ nhau và bằng 0,75 điểm nên $\frac{s_2^2}{s_1^2} < 3$, sử dụng $df = n_1 + n_2 - 2$, khi sử dụng phân phối *t* thì cần phải khảo sát ít nhất 110 học viên trong mỗi nhóm (tham khảo cách làm của câu 4).

Câu 3. Một khảo sát lương khởi điểm mỗi tháng của hai nhóm sinh viên vừa tốt nghiệp thuộc lĩnh vực Phát triển phần mềm và thuộc lĩnh vực Dịch vụ khách hàng (Xây dựng và bất động sản) cho kết quả như trong bảng dưới đây:

	Dịch vụ khách hàng	Phát triển phần mềm
Cỡ mẫu	50	50
Trung bình ($)	525	625
Độ lệch chuẩn ($)	75	100

a) Anh/chị tính khoảng tin cậy 95% của mức chênh lệch của lương khởi điểm của hai nhóm sinh viên trên.

Với α = 5% $\rightarrow Z_{\alpha/2} = NORMSINV(0{,}975) = 1{,}96$

Khoảng tin cậy 95% mức chênh lệch của lương khởi điểm của hai nhóm sinh viên trên là:

$$\mu_1 - \mu_2 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 525 - 625 \pm 1{,}96 \times \sqrt{\frac{75^2}{50} + \frac{100^2}{50}} = [-134{,}65;\ -65{,}35]\ \$$$

b) Anh/chị có nhận định gì về sự khác nhau của mức lương khởi điểm của hai nhóm sinh viên trên?

Với khoảng tin cậy 95%, ta kết luận được có sự khác biệt về mức lương khởi điểm của hai nhóm sinh viên trên, cụ thể nhóm sinh viên tốt nghiệp thuộc lĩnh vực Phát triển phần mềm có mức lương khởi điểm cao hơn nhóm sinh viên tốt nghiệp thuộc lĩnh vực Dịch vụ khách hàng (Xây dựng và bất động sản)

Câu 4. Nhiệt độ bề mặt trái đất có ảnh hưởng lớn về nhiều mặt đến hiệu quả sản xuất lương thực của ngành nông nghiệp, và có thể được đo bằng các cảm biến trên mặt đất hoặc các cảm biến hồng ngoại được lắp trên máy bay hoặc vệ tinh. Phương pháp đo trên mặt đất đòi hỏi rất nhiều công sức và thời gian do các phép đo cần được lặp lại nhiều lần để có ước lượng chính xác. Phương pháp đo bằng cảm biến hồng ngoại tuy tiết kiệm thời gian và công sức nhưng kết quả đo có vẻ có độ lệch. Để xác định độ lệch này, các kết quả đo được thực hiện bằng cả hai phương pháp tại 5 vị trí và được tóm tắt trong bảng dưới đây:

Vị trí	Sensor mặt đất	Sensor hồng ngoại
1	46,1	47,0
2	45,4	46,0
3	36,9	37,2
4	31,5	32,7
5	25,7	26,2

a) Các số liệu trên có cung cấp đủ bằng chứng để kết luận rằng có độ lệch trong kết quả đo của hai phương pháp không? Giải thích.

Gọi $\bar{x}_1$ là nhiệt độ bề mặt trái đất trung bình khi sử dụng phương pháp đo bằng sensor mặt đất

Gọi $\bar{x}_2$ là nhiệt độ bề mặt trái đất trung bình khi sử dụng phương pháp đo bằng sensor hồng ngoại

Từ dữ kiện đề bài, ta có:

Nhiệt độ bề mặt trái đất trung bình của hai phương pháp đo lần lượt là $\bar{x}_1 = 37{,}12$ và $\bar{x}_2 = 37{,}82$

Độ lệch chuẩn của hai phương pháp hai phương pháp đo lần lượt là $s_1 = 8{,}821$ và $s_2 = 8{,}843$

Vì $\frac{s_2^2}{s_1^2} = 1{,}01 < 3$ nên $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(5-1)\times 8{,}821^2+(5-1)\times 8{,}843^2}{5+5-2} = 78 \rightarrow s = 8{,}832$

$$\text{và } df = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$$

Giả thuyết H$_0$: $\mu_1 - \mu_2 = D_0$

Giả thuyết H$_a$: $\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

Trị thống kê kiểm định:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{37{,}12 - 37{,}82}{8{,}832 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} = -0{,}125$$

Giả sử độ tin cậy của bài kiểm định 95%

Ta có $t > t_{\frac{\alpha}{2}, df=8} = T.INV(0{,}025; 8) = -2.306$ nên chưa đủ cơ sở để bác bỏ H$_0$, đồng nghĩa các số liệu trên chưa có đủ bằng chứng để kết luận rằng có độ lệch trong kết quả đo của hai phương pháp

b) Ước lượng khoảng khác biệt của trung bình kết quả đo của hai phương pháp với độ tin cậy 98%.

Khoảng khác biệt của trung bình kết quả đo của hai phương pháp với độ tin cậy 98%:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}, df=8} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 37{,}12 - 37{,}82 \pm 2{,}8965 \times 8{,}832 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}$$

$$= [-16{,}879;\ 15{,}479]$$

c) Theo anh/chị, thí nghiệm trên cần thực hiện tại bao nhiêu vị trí để có thể ước lượng được khoảng khác biệt của trung bình kết quả đo từ hai phương pháp trong phạm vi 1^{o}C với độ tin cậy 95%.

Để có thể ước lượng được khoảng khác biệt của trung bình kết quả đo từ hai phương pháp trong phạm vi 0,2^{o}C, đồng nghĩa với biên độ sai số (margin of error) bằng 1^{o}C

Ta có $t_{\frac{\alpha}{2}, df=n_1+n_2-2} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq 1$

Sử dụng Excel để mô phỏng tính toán các giá trị, ta có bảng sau:

$n_1 = n_2$	df	$t_{\alpha/2}$	margin of error
2	2	-4,3027	38,0017
3	4	-2,7764	20,0221
4	6	-2,4469	15,2816
5	8	-2,3060	12,8812
6	10	-2,2281	11,3618
7	12	-2,1788	10,2861
8	14	-2,1448	9,4715
9	16	-2,1199	8,8263
10	18	-2,1009	8,2983
11	20	-2,0860	7,8558
12	22	-2,0739	7,4778
13	24	-2,0639	7,1499
14	26	-2,0555	6,8619
15	28	-2,0484	6,6062
16	30	-2,0423	6,3773
17	32	-2,0369	6,1707
18	34	-2,0322	5,9830
19	36	-2,0281	5,8116
20	38	-2,0244	5,6541
21	40	-2,0211	5,5088
22	42	-2,0181	5,3741
23	44	-2,0154	5,2489
24	46	-2,0129	5,1321
25	48	-2,0106	5,0228
26	50	-2,0086	4,9202
27	52	-2,0066	4,8236
28	54	-2,0049	4,7325
29	56	-2,0032	4,6464
30	58	-2,0017	4,5648
…	…	…	…
600	1198	-1,9619	1,0004
601	1200	-1,9619	0,9996
602	1202	-1,9619	0,9988
603	1204	-1,9619	0,9979
604	1206	-1,9619	0,9971
605	1208	-1,9619	0,9963
606	1210	-1,9619	0,9955
607	1212	-1,9619	0,9946
608	1214	-1,9619	0,9938
609	1216	-1,9619	0,9930
610	1218	-1,9619	0,9922

Như vậy, để biên sai số nằm trong khoảng bằng 1^oC với độ tin cậy 95%, thí nghiệm trên cần thực hiện tại 601 vị trí.

Câu 5. Một hãng sản xuất bóng đèn công nghiệp kỳ vọng rằng trung bình của tuổi thọ bóng đèn là cao và ổn định (sự dao động tuổi thọ của các bóng đèn trong các lô thành phẩm khác nhau là thấp). Một mẫu 12 bóng đèn được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra tuổi thọ. Kết quả tuổi thọ (theo giờ) được trình bày trong bảng dưới đây:

2100	1951	2415
1883	2146	2019
1924	2077	2286
2501	2161	1827

Hãng sản xuất bóng đèn muốn kiểm soát độ dao động của tuổi thọ bóng đèn sao cho độ lệch chuẩn dưới 100 giờ. Các kết quả kiểm tra trên có cung cấp đủ bằng chứng để kết luận hãng đã đạt được mục đích kiểm soát không? (sử dụng α = 0,01).

Phương sai của 12 bóng đèn được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra tuổi thọ là: $s^2 = 43.788$ (giờ)^2

Khoảng tin cậy của phương sai của tổng thể là: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$

Với $\alpha = 1\%, df = 11$, ta có $\chi^2_{\alpha/2} = CHISQ.INV(0{,}005; 11) = 2{,}603$

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = CHISQ.INV(0{,}995; 11) = 26{,}757$$

Ta có: $\frac{(12-1)\times 43.788}{2{,}603} \leq \sigma^2 \leq \frac{(12-1)\times 43.788}{26{,}757} \leftrightarrow 18.001{,}7 \leq \sigma^2 \leq 185.028$

$$\leftrightarrow 134{,}2 \leq s \leq 430$$

Như vậy khoảng tin cậy 99% độ dao động của tuổi thọ bóng đèn nằm trong khoảng (134;430) giờ, lớn hơn độ lệch chuẩn 100 giờ như hãng sản xuất muốn kiểm soát. Vì vậy, hãng chưa đạt được mục đích kiểm soát độ dao động của tuổi thọ bóng đèn.

Giả thuyết H$_0$: $\sigma^2 = 10.000$

Giả thuyết H$_a$: $\sigma^2 > 10.000$

Trị kiểm định Chi-square:

$$\chi^2_{test} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(12-1)\times 43.788}{10.000} = 48{,}17$$

Với $\alpha = 0.01, df = 11, \chi^2_\alpha = CHISQ.INV(0{,}99; 11) = 24{,}73$

Ta thấy: $\chi^2_{test} > \chi^2_\alpha$ nên đủ cơ sở bác bỏ H$_0$

Như vậy, đủ bằng chứng để kết luận hãng chưa đạt được mục đích kiểm soát độ dao động của tuổi thọ bóng đèn.

Câu 6. Một khảo sát về mức chi tiêu cho các nhu cầu không thiết yếu so với thu nhập hằng tháng của 167 sinh viên có đi làm thêm cho kết quả như dưới đây:

	Không chi hoặc rất ít	Một phần nhỏ thu nhập	Khoảng một nửa thu nhập	Phần lớn thu nhập	Tất cả thu nhập
Nam	58	18	12	4	2
Nữ	42	11	7	8	5

Các anh/chị hãy phân tích mối quan hệ giữa mức chi tiêu so với giới tính, và trình bày các kết quả phân tích thống kê liên quan.

Giả thuyết H$_0$: Giới tính và mức chi tiêu cho các nhu cầu không thiết yếu là độc lập nhau.

Giả thuyết H_a: Giới tính và mức chi tiêu cho các nhu cầu không thiết yếu là phụ thuộc nhau.

Bảng giá trị kỳ vọng:

	Không chi hoặc rất ít	Một phần nhỏ thu nhập	Khoảng một nửa thu nhập	Phần lớn thu nhập	Tất cả thu nhập
Nam	56,29	16,32	10,69	6,75	3,94
Nữ	43,71	12,68	8,31	5,25	3,06

Do giá trị kỳ vọng của mức chi tiêu tất cả thu nhập cả nhóm nam và nữ đều nhỏ hơn 5 nên cần gộp giá trị của các cells lại như sau:

	Không chi hoặc rất ít	Một phần nhỏ thu nhập	Khoảng một nửa thu nhập	Phần lớn thu nhập & Tất cả thu nhập
Nam	58	18	12	6
Nữ	42	11	7	13

Bảng giá trị kỳ vọng sau khi gộp cells:

	Không chi hoặc rất ít	Một phần nhỏ thu nhập	Khoảng một nửa thu nhập	Phần lớn thu nhập & Tất cả thu nhập
Nam	56,29	16,32	10,69	10,69
Nữ	43,71	12,68	8,31	8,31

Trị kiểm định Chi-square: $\chi_t^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 5{,}592$

Bậc tự do: $df = (2 - 1) \times (4 - 1) = 3$

Ta có: $p\ (\chi^2 > \chi_t^2) = p\ (\chi^2 > 5{,}592) = \ 1 - CHISQ.DIST(5{,}592;3) = 0{,}1332$

Như vậy trong 100 lần khảo sát, sẽ có khoảng 13 lần chúng ta bắt gặp sự khác biệt giữa nam và nữ ở các mức chi tiêu trên thu nhập cho hàng hoá không thiết yếu lớn hơn 5,6 người.

Việc bác bỏ H_0 hay không tuỳ thuộc vào lập luận của học viên.

---HẾT---