

Causal Inference with Fuzzy Regression Discontinuity Design

Lê Việt Phú
Fulbright School of Public Policy and Management

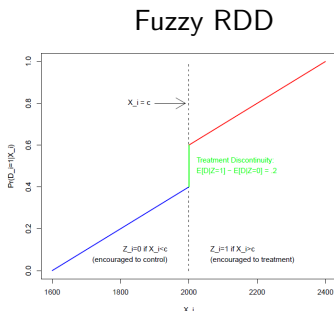
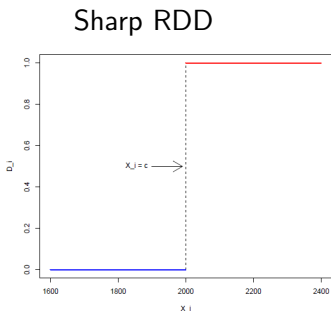
Ngày 29 tháng 7 năm 2020

Thiết kế hồi quy gián đoạn nhiều - Fuzzy Regression Discontinuity Design

Đó là trường hợp xảy ra tình trạng không tuân thủ (non-compliance) tại ngưỡng can thiệp.

- ▶ Với thiết kế Sharp RDD, xác suất tham gia chương trình nhảy từ 0 đến 1 tại hai bên của ngưỡng can thiệp c (tuân thủ hoàn toàn)
- ▶ Với thiết kế Fuzzy RDD, xác suất tham gia thay đổi xung quanh ngưỡng can thiệp c , nhưng không hoàn toàn.
 - Có những đối tượng đáng lẽ không tham gia thì lại tham gia.
 - Có những đối tượng đáng lẽ tham gia thì lại không tham gia.
 - Miễn là chúng ta có sự gián đoạn về xác suất tham gia tại ngưỡng can thiệp thì chúng ta có thể sử dụng thiết kế Fuzzy RDD.

Sự thay đổi về xác suất tham gia tại ngưỡng can thiệp theo thiết kế Sharp RDD vs. Fuzzy RDD



Xác suất tham gia gián đoạn tại ngưỡng can thiệp, nhưng trong thiết kế Fuzzy RDD do có tình trạng không tuân thủ hai bên ngưỡng can thiệp nên bước gián đoạn khác so với thiết kế Sharp RDD.

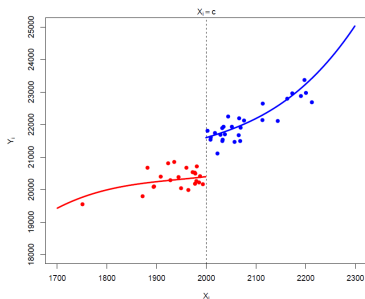
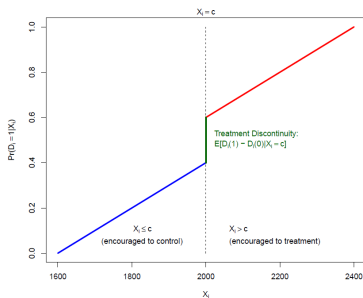
Ví dụ về thiết kế FRDD

Chương trình đào tạo nghề miễn phí cho hộ gia đình nghèo có tổng thu nhập gia đình dưới 5 triệu một tháng. Hộ đạt tiêu chí thì được khuyến khích tham gia. Hộ không đạt tiêu chí vẫn có thể tham gia, tuy nhiên không nhận được khuyến khích. Chúng ta muốn biết tác động của chính sách này đến chi tiêu của hộ hay không.

- ▶ Chương trình có thể khuyến khích các hộ đạt điều kiện nghèo tham gia, tuy nhiên sẽ không đảm bảo tuân thủ hoàn toàn. Không thể bắt buộc hộ đủ điều kiện phải tham gia; và họ có thể không tham gia vì nhiều lý do, chẳng hạn như chương trình đào tạo nghề không phù hợp với sở thích làm việc.
- ▶ Xác xuất tham gia chương trình đào tạo sẽ bị ngắt quãng ở ngưỡng 5 triệu/tháng. Hộ thu nhập trên 5 triệu/tháng sẽ không nhận được khuyến khích tham gia, mặc dù họ vẫn có thể tham gia nếu muốn.

- ▶ Kỳ vọng sẽ có sự ngắt đoạn (jump/discontinuity) ở ngưỡng thu nhập 5 triệu.
 - Ngắt đoạn ở biến phụ thuộc (chi tiêu) xung quanh ngưỡng thu nhập 5 triệu/tháng.
 - Ngắt đoạn ở xác suất tham gia xung quanh ngưỡng thu nhập 5 triệu/tháng.
- ▶ FRDD rất giống thử nghiệm ngẫu nhiên với thiết kế khuyến khích (encouragement design). Nhận được khuyến khích sẽ tăng mức độ tham gia nhưng không hoàn toàn đối với nhóm được khuyến khích.

Hình vẽ mô tả ngắt đoạn ở ngưỡng can thiệp với biến phụ thuộc và xác suất tham gia.



Do sự tồn tại của nhóm không tuân thủ xung quanh ngưỡng can thiệp, chúng ta phải định nghĩa tác động can thiệp giống như khi thực hiện RCT với thiết kế encouragement design.

Định nghĩa tác động can thiệp

Có 4 nhóm đối tượng: những người luôn tham gia, những người luôn không tham gia, những người tuân thủ, và những kẻ thách thức.

- ▶ Nhóm không tuân thủ, bao gồm nhóm luôn tham gia (always takers) và nhóm luôn không tham gia (never takers).
 - Always takers: Luôn tham gia, dù có nhận được khuyến khích hay không.
 - Never takers: Luôn không tham gia, dù có nhận được khuyến khích hay không.
- ▶ Nhóm tuân thủ (Compliers):
 - Tham gia nếu nhận được khuyến khích.
 - Không tham gia nếu không nhận được khuyến khích.
→ Tác động với nhóm này sẽ phản ánh tác động can thiệp của chính sách.
- ▶ Ngoài ra theo lý thuyết còn có một nhóm là nhóm thách thức (defiers), bao gồm những người luôn đi ngược lại khuyến nghị. Tuy nhiên chúng ta bỏ qua nhóm này trong đại đa số các nghiên cứu.

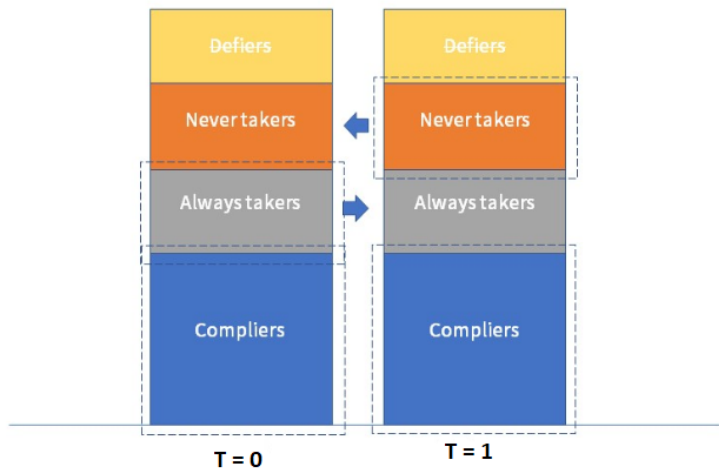
Chúng ta định nghĩa tác động can thiệp trung bình nội tại tại ngưỡng can thiệp đối với nhóm tuân thủ như sau:

$$\begin{aligned}\beta_{FRDD} &= E[Y_i(1)|X_i = c, \text{complier}] - E[Y_i(0)|X_i = c, \text{complier}] \\ &= \frac{\text{outcome discontinuity}}{\text{treatment discontinuity}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow c^+} E[Y|X = c] - \lim_{x \rightarrow c^-} E[Y|X = c]}{\lim_{x \rightarrow c^+} P[D = 1|X = c] - \lim_{x \rightarrow c^-} P[D = 1|X = c]}\end{aligned}$$

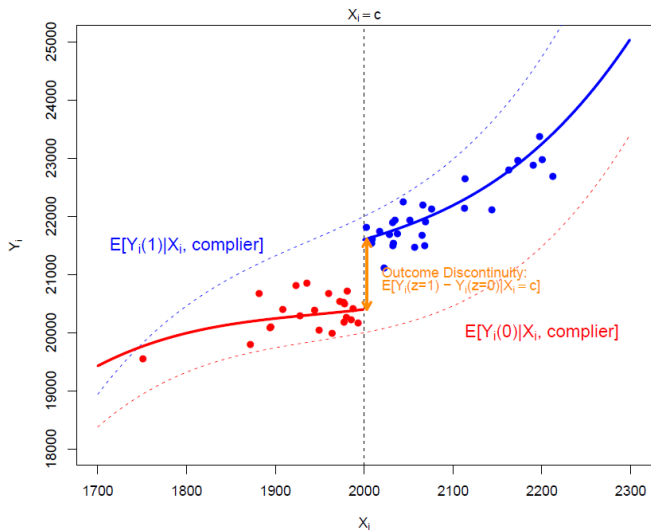
với $P[D = 1|X = c]$ là xác suất tham gia trên thực tế, đánh giá tại hai phía của ngưỡng can thiệp.

Cách tiếp cận của FRDD rất giống với RCT theo thiết kế khuyến khích để ước lượng intention-to-treat effect (ITE) và treatment effect on the treated (TET).

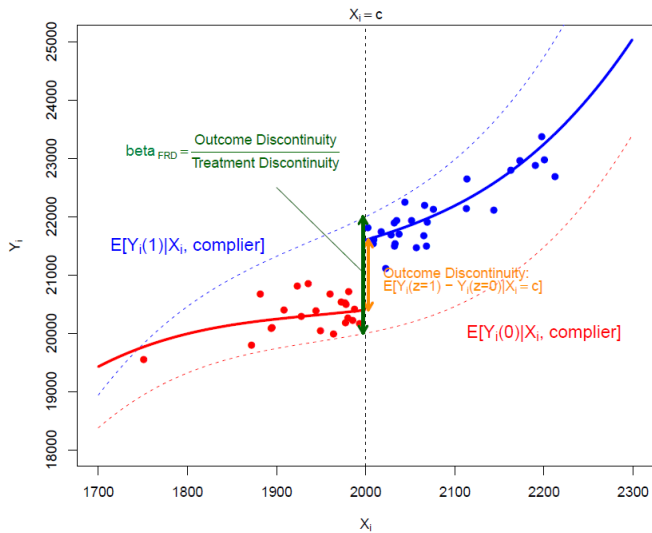
RCT với encouragement design



Mô tả ước lượng β_{FRDD}



Mô tả ước lượng β_{FRDD}



Ước lượng β_{FRDD}

Giả sử biến Z đại diện cho việc có nhận được khuyến khích hay không:

- ▶ $Z = 1$ nếu $X > c$
- ▶ $Z = 0$ nếu $X \leq c$

khi đó,

$$\begin{aligned}\beta_{FRDD} &= \frac{\lim_{x \rightarrow c^+} E[Y|X = c] - \lim_{x \rightarrow c^-} E[Y|X = c]}{\lim_{x \rightarrow c^+} P[D = 1|X = c] - \lim_{x \rightarrow c^-} P[D = 1|X = c]} \\ &\approx \frac{E[Y|Z = 1] - E[Y|Z = 0]}{E[D|Z = 1] - E[D|Z = 0]}\end{aligned}$$

Ước lượng β_{FRDD}

Trong thiết kế Sharp RDD với giả định đường hồi quy tuyến tính có độ dốc khác nhau hai bên ngưỡng cắt, chúng ta đã ước lượng hồi quy sau bằng OLS:

$$E[Y|X, D] = \beta_0 + \beta_{SRDD}D + \beta_2\tilde{X} + \beta_3D * \tilde{X} \quad (1)$$

Với D là tình trạng tham gia, và $\tilde{X} = X - c$. $D = 1$ nếu $\tilde{X} > 0$

Đối với FRDD, giả sử phương trình hồi quy là:

$$E[Y|X, D] = \beta_0 + \beta_{FRDD}D + \beta_2\tilde{X} + \beta_3D * \tilde{X} \quad (2)$$

Có thể ước lượng β_{FRDD} như β_{SRDD} không?

Ước lượng SRDD vs FRDD

- ▶ Với SRDD: Tình trạng tuân thủ là hoàn toàn ($D = 1$ khi $X > c$) nên ngưỡng can thiệp là một thử nghiệm tự nhiên, và không có hiện tượng tự lựa chọn vào nhóm hưởng lợi (**no self selection into treatment**), và giả định $Y_0, Y_1 \perp D|X$ thỏa.

→ Chúng ta có tình huống mô phỏng gần giống với RCT nhất, và có thể dùng regression adjustments để ước lượng β_{SRDD} và ước lượng sẽ mang hàm ý nhân quả.
- ▶ Với FRDD: Do có nhóm không tuân thủ nên lựa chọn tham gia chính sách D là không hoàn toàn ngẫu nhiên. Nói cách khác, chúng ta có hiện tượng chọn mẫu, và các quan sát hai bên ngưỡng can thiệp không phải là nhóm hưởng lợi và đối chứng hợp lệ.

Ước lượng FRDD

FRDD là một tình huống lựa chọn mẫu dựa trên đặc tính không quan sát được (selection on unobservables).

- ▶ Tình trạng tham gia có thể tương quan với các đặc tính không quan sát được nên chúng ta gặp phải vấn đề biến nội sinh trong mô hình (2). Ước lượng β_{FRDD} bằng OLS có thể bị thiên lệch và không nhất quán.
- ▶ Nếu có dữ liệu kỳ trước và sau khi thực hiện can thiệp thì có thể dùng thiết kế DiD để loại bỏ yếu tố không quan sát được không thay đổi theo thời gian.
- ▶ Nếu chỉ có dữ liệu chéo thì giải pháp xử lý là sử dụng phương pháp biến công cụ và 2SLS với điều kiện loại trừ để thiết lập quan hệ nhân giữa D với Y .

Tìm biến công cụ cho tình trạng tham gia D

- ▶ Theo thiết kế khuyến khích thì sẽ có mối tương quan giữa việc có nhận được khuyến khích ($Z = 1$) và có tham gia trên thực tế ($D = 1$) \Rightarrow Kỳ vọng Z tương quan với D và thỏa điều kiện biến công cụ phù hợp (relevance condition).
- ▶ Phân bổ Z vào nhóm hưởng lợi và đối chứng là ngẫu nhiên, do đó Z không tương quan với biến phụ thuộc (thu nhập, chi tiêu cá nhân...) $\Rightarrow Z$ thỏa điều kiện loại trừ (exclusion restriction).

\rightarrow Thiết kế FRDD dùng khuyến khích Z để làm biến công cụ cho tình trạng tham gia D .

Ước lượng β_{FRDD} bằng 2SLS/IV

- ▶ Bước 1: Ước lượng tình trạng tham gia D bằng biến công cụ Z .

$$D = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_2 \tilde{X} + \alpha_3 Z * \tilde{X} + u \quad (3)$$

sau đó ước lượng \hat{D} .

- ▶ Bước 2: Ước lượng hàm hồi quy giống như với phương pháp SRDD:

$$Y = \beta_0 + \beta_{FRDD} \hat{D} + \beta_2 \tilde{X} + \beta_3 \hat{D} * \tilde{X} + \varepsilon \quad (4)$$

Chúng ta cũng có thể sử dụng hàm đa thức hay các cấu trúc hàm khác phức tạp hơn.

Bản chất của FRDD là hồi quy biến công cụ:

- ▶ Sử dụng tình trạng phân bổ vào nhóm hưởng lợi hay nhóm đối chứng làm biến công cụ cho xác suất tham gia trên thực tế.
- ▶ Ước lượng β_{FRDD} được gọi là **tác động can thiệp trung bình nội tại đối với nhóm tuân thủ (Local Average Treatment Effect - LATE)** hoặc **tác động can thiệp trung bình với nhóm tuân thủ (Complier Average Causal Effect - CACE)**.

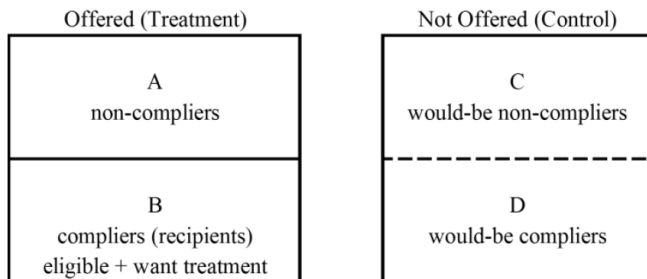
LATE/CACE tương đồng với ước lượng ITT từ thiết kế RCT với encouragement design.

Các kiểm định hậu hồi quy

- ▶ Tương tự như đối với phương pháp biến công cụ thông thường: kiểm định biến công cụ yếu, ràng buộc chặt, nội sinh.
- ▶ Lựa chọn cấu trúc hàm.
- ▶ Bandwidth.
- ▶ Điều kiện cân bằng.
- ▶ Điều kiện gián đoạn tại ngưỡng can thiệp.

Từ RCT đến FRDD

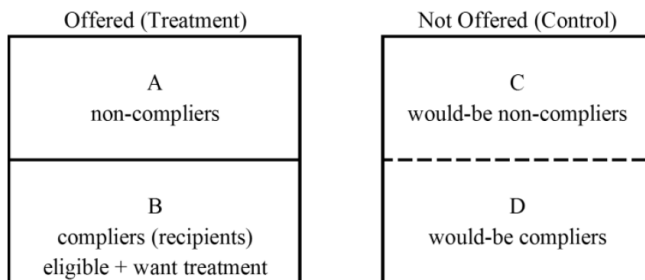
RCT với thiết kế encouragement design ước lượng ITE bằng cách so sánh (A+B) với (C+D) dựa trên cơ chế phân bổ khuyến khích, bất kể các quan sát có thực sự sử dụng khuyến khích trên thực tế hay không.



TET được ước lượng bằng cách điều chỉnh ITE cho sự khác biệt về xác suất tham gia giữa hai nhóm.

Từ RCT đến FRDD

FRDD ước lượng LATE bằng cách so sánh B với D (nhóm tuân thủ).



$$\beta_{FRDD} \approx \frac{E[Y|Z = 1] - E[Y|Z = 0]}{E[D|Z = 1] - E[D|Z = 0]} \quad (5)$$

β_{FRDD} có thể được hiểu như sau

1. β_{FRDD} sẽ giống như ITE nếu như có tình trạng tuân thủ 100% (khi đó xác suất tham gia nhảy từ 0 đến 1 tại ngưỡng can thiệp).

$$ITE = E[Y|Z = 1] - E[Y|Z = 0]$$

2. Tuy nhiên, do có tình trạng không tuân thủ, chúng ta phải điều chỉnh ITE bằng gián đoạn xác suất tham gia tại ngưỡng can thiệp (Z chuyển từ 0 sang 1).

$$\Delta P = E[D|Z = 1] - E[D|Z = 0]$$

và

$$\beta_{FRDD} = \frac{ITE}{\Delta P}$$

3. Việc điều chỉnh ở bước 2 sẽ cho phép tách lọc tác động từ nhóm tuân thủ ($B + D$) khỏi tổng thể mẫu ($A + B + C + D$).

Ước lượng β_{FRDD} bằng 2SLS/IV

Khi ước lượng β_{FRDD} bằng hồi quy 2SLS với biến công cụ, tương đương chúng ta ước lượng hai mô hình *rút gọn* sau:

$$Y = \pi_0 + \pi_1 Z + \pi_2 \tilde{X} + \pi_3 Z * \tilde{X} + \varepsilon \quad (6)$$

và

$$D = \gamma_0 + \gamma_1 Z + \gamma_2 \tilde{X} + \gamma_3 Z * \tilde{X} + u \quad (7)$$

Với Z là tình trạng phân bổ khuyến khích. D là biến tham gia chính sách trên thực tế.

(Lưu ý sự khác biệt giữa SRDD và FRDD: Với SRDD thì $Z \equiv D$ vì có tình trạng tuân thủ hoàn toàn.)

Ước lượng β_{FRDD} bằng 2SLS/IV

và sau đó thì ước lượng β_{FRDD} từ tham số của hai phương trình rút gọn:

$$\beta_{FRDD} = \frac{\hat{\pi}_1}{\hat{\gamma}_1} \quad (8)$$

Công thức (8) diễn giải β_{FRDD} là tỷ số của tác động can thiệp ITE lên thay đổi xác suất tham gia tại ngưỡng can thiệp.

Kết luận

- ▶ Cả SRDD và FRDD đều mang tính chất địa phương (local estimators).
- ▶ SRDD chỉ có hiệu lực nội tại xung quanh vùng giá trị c của biến can thiệp X .
- ▶ FRDD có hiệu lực nội tại xung quanh vùng giá trị c của biến can thiệp X , và chỉ áp dụng đối với nhóm tuân thủ.
 - Nếu tỷ lệ nhóm tuân thủ tại ngưỡng can thiệp thấp \rightarrow Biến can thiệp ít tác động đến xác suất tham gia \Leftrightarrow Biến công cụ yếu và các vấn đề liên quan đến weak instruments.
 - Nếu tỷ lệ nhóm tuân thủ cao \rightarrow Biến can thiệp ảnh hưởng lớn đến xác suất tham gia \Leftrightarrow Biến công cụ hợp lệ.
 - Nếu tuân thủ hoàn toàn tại ngưỡng can thiệp \rightarrow Ước lượng FRDD tiệm cận ước lượng SRDD và không cần sử dụng 2SLS/IV.

Nâng cao: Hồi quy nội tại (local regression smoothing) và bandwidth

- ▶ Phương pháp phi tham số để xấp xỉ một hàm số bất kỳ, ví dụ triển khai chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại giá trị a :

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

- ▶ Nếu x nhận khoảng giá trị lớn thì sử dụng một hàm số đa thức sẽ dẫn đến xấp xỉ thiếu chính xác. Do đó, hàm xấp xỉ được mở rộng cho toàn bộ khoảng giá trị của x bằng cách dùng *splines*. Bản chất của *splines* là chia khoảng giá trị của x thành các khoảng dữ liệu nhỏ (bandwidth) và ước lượng các hàm đa thức riêng biệt trong mỗi bandwidth.

Local regression smoothing and bandwidth

- ▶ Ví dụ đối với hàm xấp xỉ bậc 3 (cubic spline), nếu chúng ta chia khoảng phân phối của dữ liệu ra làm l phần:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 \\ + \beta_4 \mathbf{1}(x_i > k_1)(x_i - k_1)^3 + \dots + \beta_{3+l} \mathbf{1}(x_i < k_l)(x_i - k_l)^3 + \varepsilon_i$$

trong đó hàm chỉ số $\mathbf{1}(x_i > k_1)$ nhận giá trị 1 nếu x_i nằm trong các khoảng giá trị $k_1 - k_2$.

- ▶ Câu hỏi: chia khoảng giá trị thành các bandwidth hay cấu trúc hàm quan trọng khi xấp xỉ một hàm số?

Với hàm hồi quy kernel,

$$f(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

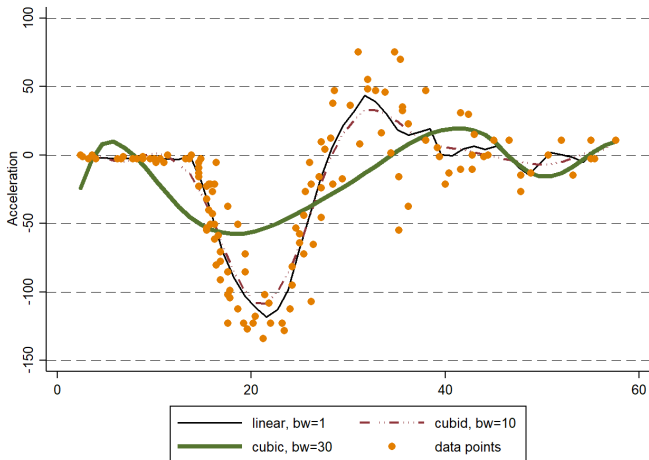
trong đó h là bandwidth, $K(\cdot)$ là hàm kernel. Một số dạng hàm kernel thường sử dụng:

$$\text{Uniform: } \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}(|u| < 1)$$

$$\text{Epanechnikov: } \frac{3}{4} \cdot \mathbf{1}(|u| < 1)(1 - u^2)$$

$$\text{Gaussian: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Tác động của bandwidth lên hàm ước lượng



Bias - variance tradeoff: Ước lượng quá khớp (overfitting) có thể hạn chế độ chệch của mô hình nhưng dẫn đến tăng phương sai của tham số.

Ví dụ hiện tượng ước lượng quá khớp (overfitting)

- ▶ Sử dụng lại bộ dữ liệu VHLSS 2010 và ước lượng hàm tỷ suất thu nhập của đi học.
- ▶ Tạo ra các biến dummies đại diện cho từng tỉnh, huyện, xã, và số hộ gia đình.
- ▶ Ước lượng mô hình với lần lượt các biến dummies kể trên. So sánh sự thay đổi của R^2 .
- ▶ Nhận xét khả năng dự báo của mô hình cho nhóm hộ không nằm trong mẫu dữ liệu?

Một số phương pháp lựa chọn bandwidth

- ▶ Imbens and Kalyanaraman (2012) chọn h bằng cách tối thiểu hóa MSE

$$h_{\text{MSE}} = C_{\text{MSE}}^{1/5} \cdot n^{-1/5} \quad C_{\text{MSE}} = C(K) \cdot \frac{\text{Var}(\hat{\tau}_{\text{SRD}})}{\text{Bias}(\hat{\tau}_{\text{SRD}})^2}$$

$$\hat{h}_{\text{opt}} = C_K \cdot \left(\frac{2\hat{\sigma}^2(c)}{\hat{f}(c) \cdot \left(\left(\hat{m}_+^{(2)}(c) - \hat{m}_-^{(2)}(c) \right)^2 + (\hat{r}_+ + \hat{r}_-) \right)} \right)^{1/5} \cdot N^{-1/5}$$

và $C_K = 3.4375$ với hàm triangle kernel.

- ▶ Tính bằng cross validation:

$$\hat{h}_{\text{cv}} = \arg \min_{h>0} \text{CV}_\delta(h), \quad \text{CV}_\delta(h) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_{-,[\delta]} \leq X_i \leq X_{+,[\delta]}) (Y_i - \hat{\mu}(X_i; h))^2$$

Hầu hết các phần mềm đều có các module tính optimal bandwidth.

Phương pháp kiểm chứng chéo (cross-validation)

- ▶ Áp dụng để dự báo cho quan sát ngoài mẫu (out-of-sample prediction). Mô hình ước lượng quá khớp (overfitting) với dữ liệu ước lượng (training dataset) sẽ có sai số dự báo lớn với quan sát ngoài mẫu (test set/out-of-sample data).
- ▶ Do đó, nếu mục đích của mô hình là tối đa khả năng dự báo thì cần lựa chọn mô hình tối ưu sao cho sai số dự báo MSE là nhỏ nhất.

$$MSE = E[(y - \hat{y})^2]$$

Thuật giải của phương pháp kiểm chứng chéo

- ▶ Chia bộ dữ liệu ngẫu nhiên thành hai phần là bộ dữ liệu ước lượng (training data) và bộ dữ liệu kiểm chứng (validation data)
- ▶ Ước lượng mô hình đối với bộ dữ liệu ước lượng.
- ▶ Sử dụng mô hình của dữ liệu ước lượng để ước tính MSE cho dữ liệu kiểm chứng.
- ▶ Lựa chọn mô hình sao cho MSE là tối thiểu.

Các hình thức kiểm chứng chéo

▶ Leave-one-out Cross Validation (LOOCV)

- Lần lượt chia bộ dữ liệu n quan sát thành training data với $(n - 1)$ quan sát và test data với 1 quan sát.
- Ước lượng giá trị dự báo $\hat{y}_{(-i)}$ đối với lần lượt các quan sát bị tách làm nhóm kiểm chứng.
- Ước tính LOOCV như sau:

$$CV(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MSE_{(-i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{(-i)})^2$$

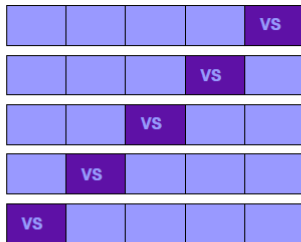
▶ k-fold Cross Validation

- Chia bộ dữ liệu thành K nhóm với số quan sát bằng nhau. Lấy nhóm 1 được sử dụng làm test data, $K - 1$ nhóm sử dụng làm training data.
- Ước lượng mô hình với training data, ước tính MSE cho nhóm 1.
- Lặp lại K lần cho nhóm 2, 3,...
- Ước tính

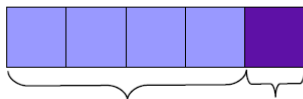
$$CV_{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K MSE_{(j)}$$

- ▶ LOOCV là trường hợp khi $K = n$. Thông thường $K = 5$ hoặc $K = 10$.

V-fold cross validation



Training and Validation Sets



Training set

Train = compute estimator(s)

Validation set

Validate = assess performance of estimator(s)

Thực hành

- ▶ Ước lượng FRDD bằng 2SLS/IV.
- ▶ Ước lượng SRDD và FRDD bằng local regression.
- ▶ Sử dụng package rdrobust (findit rdrobust).