

# Hồi quy Hệ phương trình (Simultaneous Equations Model)

Lê Việt Phú  
Trường Chính sách Công và Quản lý Fulbright

Ngày 30 tháng 3 năm 2019

# Hệ phương trình đồng thời/Hệ phương trình cấu trúc

## Simultaneous equation model/Structural equation model (SEM)

- ▶ Sử dụng để mô tả cấu trúc hoặc hành vi của các chủ thể kinh tế.
- ▶ Điểm cân bằng thông thường là kết quả của tương tác giữa các hệ thống (ví dụ cung/cầu, giá và lượng...)
- ▶ Thông thường các biến giải thích và phụ thuộc được xác định đồng thời/là kết quả lẫn nhau, dẫn đến các điều kiện của mô hình CLRM bị vi phạm, và ước lượng bằng OLS không có hiệu lực nội tại.

## Hệ phương trình đồng thời (Simultaneous equations system)

Giả sử giá cả và lượng tiêu thụ của hàng hóa quan sát được trên thị trường:

$$Price = \beta_0 + \beta_1 Quantity + \beta_2 x + u \quad (1)$$

và

$$Quantity = \gamma_0 + \gamma_1 Price + \gamma_2 y + v \quad (2)$$

với  $u$ ,  $v$  là white noise. Giả sử phương trình giá mô tả hàm cầu, mô hình lượng mô tả hàm cung.

- ▶  $x$  và  $y$  là các biến ngoại sinh.
- ▶ Chúng ta có thể ước lượng  $\beta_0$  và  $\beta_1$  không chệch và nhất quán từ một trong các phương trình trên không?
- ▶ Kỳ vọng gì về các tham số hệ số góc ( $\beta_1$  và  $\gamma_1$ )?

Thay phương trình (2) vào (1) và tìm hàm hồi quy giá theo các biến còn lại:

$$Price = \beta_0 + \beta_1(\gamma_0 + \gamma_1 Price + \gamma_2 y + v) + \beta_2 x + u$$

sau khi xử lý, chúng ta có hàm hồi quy giá theo các biến giải thích:

$$Price = \frac{\beta_0 + \beta_1 \gamma_0}{1 - \beta_1 \gamma_1} + \frac{\beta_1 \gamma_2}{1 - \beta_1 \gamma_1} y + \frac{\beta_2}{1 - \beta_1 \gamma_1} x + \frac{\beta_1 v + u}{1 - \beta_1 \gamma_1} \quad (3)$$

$$= \pi_0 + \pi_1 y + \pi_2 x + \varepsilon \quad (4)$$

- ▶ Mô hình (3-4) được gọi là mô hình rút gọn (reduced-form model) của mô hình cấu trúc (1-2).
- ▶ Các tham số  $\pi$  trong mô hình (4) được gọi là tham số rút gọn của các tham số cấu trúc  $\beta$  và  $\gamma$ .
- ▶ Các tham số rút gọn là hàm phi tuyến của các tham số cấu trúc.

## Có thể ước lượng tham số cấu trúc bằng hồi quy OLS của mô hình (1-2) không?

Từ phương trình (3):

$$\text{cov}(\text{Price}, v) = \frac{\beta_1}{1 - \beta_1 \gamma_1} \sigma_v^2$$

- ▶ Do giá tương quan với phần dư nên hồi quy mô hình (2) bằng OLS sẽ không có hiệu lực nội tại.
- ▶ Ước lượng của  $\beta_1$  và  $\gamma_1$  từ phương trình (1) và (2) bằng OLS bị thiên lệch, được gọi là thiên lệch đồng thời (simultaneity bias).

# Các phương pháp ước lượng hệ phương trình đồng thời

1. Hồi quy rút gọn/hồi quy gián tiếp (reduced form regression/indirect least square-ILS)
2. Hồi quy hai giai đoạn sử dụng biến công cụ (2sls/instrumental variables regression)
3. Hồi quy hệ phương trình (hồi quy 3 giai đoạn, 3sls)

# 1. Phương pháp hồi quy gián tiếp (ILS)

Tương tự như mô hình (3-4), chúng ta có thể giải được mô hình lượng thông qua các biến ngoại sinh  $x$  và  $y$ . Từ đó, chúng ta tìm được hệ phương trình rút gọn như sau:

$$Price = \pi_0 + \pi_1 y + \pi_2 x + \varepsilon \quad (5)$$

$$Quantity = \theta_0 + \theta_1 y + \theta_2 x + \eta \quad (6)$$

- ▶ Chúng ta có thể ước lượng (5-6) bằng OLS do  $x$  và  $y$  là các biến ngoại sinh, giả định không tương quan với các phần dư gộp  $\varepsilon$  và  $\eta$ .
- ▶ Từ các tham số rút gọn  $\pi$  và  $\theta$ , chúng ta có thể truy lại các tham số cấu trúc  $\beta$  và  $\gamma$ .
- ▶ Chúng ta có tất cả 6 tham số rút gọn  $\Rightarrow$  Có thể tính được 6 tham số cấu trúc.

## Vấn đề nhận diện (identification) trong ước lượng hệ phương trình đồng thời

- ▶ Nếu chúng ta có đủ 6 tham số rút gọn cho 6 tham số cấu trúc  $\Rightarrow$  hệ phương trình có nghiệm duy nhất (exact-identification).
- ▶ Nếu tham số rút gọn ít hơn số tham số cấu trúc, hệ phương trình hồi quy nhận diện thiếu (underidentification)  $\Rightarrow$  một trong các phương trình của hệ phương trình đồng thời không giải được.
- ▶ Nếu có nhiều tham số rút gọn hơn tham số cấu trúc  $\Rightarrow$  nhận diện vượt mức (overidentification) (có thể có nhiều nghiệm số cấu trúc hơn số tham số rút gọn).

$\Rightarrow$  Khi nào thì ước lượng được tham số gì?



## Vấn đề nhận diện trong hệ phương trình đồng thời

- ▶ Phương pháp ILS yêu cầu hệ phương trình phải có nghiệm số. Nếu hệ phương trình nhận diện thiếu hoặc vượt mức đều có thể gặp rắc rối.
- ▶ Thông thường chúng ta muốn ước lượng phương trình cấu trúc (1-2) thay vì phương trình rút gọn (5-6) vì nó diễn giải **hành vi của chủ thể** thông qua quan hệ tương tác giữa các biến (gồm cả biến nội sinh như giá và lượng) thay vì giải thích **cân bằng thị trường** thông qua các biến ngoại sinh ( $x$ ,  $y$ ).
- ▶ Phương pháp ILS không cho phép trực tiếp ước lượng sai số chuẩn của các tham số ước lượng.

Ví dụ chúng ta chỉ có một biến ngoại sinh  $y$  trong hệ phương trình đồng thời:

$$\begin{aligned} \text{Price} &= \beta_0 + \beta_1 \text{Quantity} + u \\ \text{Quantity} &= \gamma_0 + \gamma_1 \text{Price} + \gamma_2 y + v \end{aligned}$$

Sau khi chuyển đổi thành hệ phương trình rút gọn:

$$\begin{aligned} \text{Price} &= \pi_0 + \pi_1 y + \varepsilon \\ \text{Quantity} &= \theta_0 + \theta_1 y + \eta \end{aligned}$$

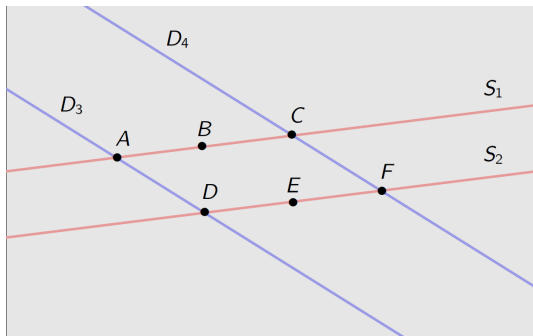
- ▶ Chúng ta có 5 tham số cấu trúc nhưng chỉ có 4 tham số rút gọn  $\Rightarrow$  Không thể ước lượng được một trong các phương trình cấu trúc.
- ▶ Nhưng chúng ta vẫn có thể ước lượng được một số tham số cấu trúc! Trên thực tế, phương trình cấu trúc về giá sẽ ước lượng được (mặc dù không có biến  $y$  trong đó, còn phương trình lượng thì không)!

## Yêu cầu về nhận diện trong hệ phương trình đồng thời

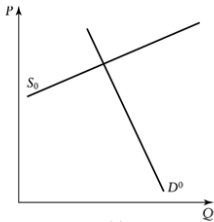
- ▶ Để ước lượng phương trình giá, chúng ta cần biến ngoại sinh trong phương trình lượng nhưng không nằm trong phương trình giá.
- ▶ Để ước lượng phương trình lượng, chúng ta cần biến ngoại sinh trong phương trình giá nhưng không nằm trong phương trình lượng.

Chúng ta gọi các nhân tố nằm ngoài các phương trình cấu trúc là nhân tố dịch chuyển (shifters). Chúng ta cần nhân tố dịch chuyển đường cung (lượng) để ước lượng đường cầu (giá) và ngược lại. Đây gọi là điều kiện loại trừ (exclusion restriction), tương tự như hồi quy biến công cụ.

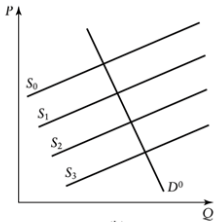
## Diễn giải vấn đề nhận diện trong mô hình hệ phương trình đồng thời



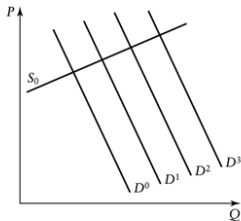
- ▶ Các điểm  $A, B, C, D, \dots$  là các mức giá và lượng quan sát được khi thị trường cân bằng.
- ▶ Nếu chúng ta ước lượng hệ phương trình cấu trúc bằng OLS, chúng ta không thu được một trong các đường cung ( $S_1, S_2$ ) hoặc đường cầu ( $D_3, D_4$ ).



(a)



(b)



(c)

Hình (b): Nếu có nhân tố dịch chuyển đường cung, chúng ta ước lượng được đường cầu.

Hình (c): Nếu có nhân tố dịch chuyển đường cầu, chúng ta ước lượng được đường cung.

Thay đổi của các biến nội sinh (giá, lượng) chỉ dịch chuyển dọc các đường cung/cầu có sẵn.

## 2. Phương pháp hồi quy 2 giai đoạn (2SLS)

Giả sử chúng ta có biến ngoại sinh  $y$  dịch chuyển đường cung nhưng không nằm trong đường cầu (thỏa mãn điều kiện loại trừ), chúng ta có thể sử dụng hồi quy 2SLS để ước lượng hàm cầu.

$$1st\ stage : \quad Quantity = \gamma_0 + \gamma_2 y + v$$

$$2nd\ stage : \quad Price = \beta_0 + \beta_1 \widehat{Quantity} + u$$

Nếu chúng ta muốn ước lượng phương trình hàm cung, chúng ta cần biến ngoại sinh  $x$  dịch chuyển hàm cầu nhưng không nằm trong hàm cung để thực hiện hồi quy 2SLS đối với hàm cung.

# Ví dụ ước lượng hàm cầu điện sinh hoạt ở Việt Nam<sup>1</sup>

$$\ln E_i = \beta_0 + \beta_1 \times \ln P_i + \beta_2 \times \ln \text{Income}_i + \beta_3 \times \ln P_i^s + \sum_j X_j^i \times \beta_j + \varepsilon_i$$

- ▶  $E$  là lượng điện sử dụng hàng tháng (KWh).
- ▶  $P_i$  là giá điện phải trả.
- ▶ Các biến giải thích khác bao gồm thu nhập hộ, giá các mặt hàng nhiên liệu thay thế  $P_i^s$ .
- ▶  $X_j$  là các biến kiểm soát khác trong mô hình.

Hàm cầu log-log cho phép giải thích các tham số  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , and  $\beta_3$  là độ co giãn theo giá, theo thu nhập, và co dẫn chéo. Mô hình này thích hợp với hàm cầu ngắn hạn khi các yếu tố về sở hữu thiết bị dùng điện chưa thay đổi.

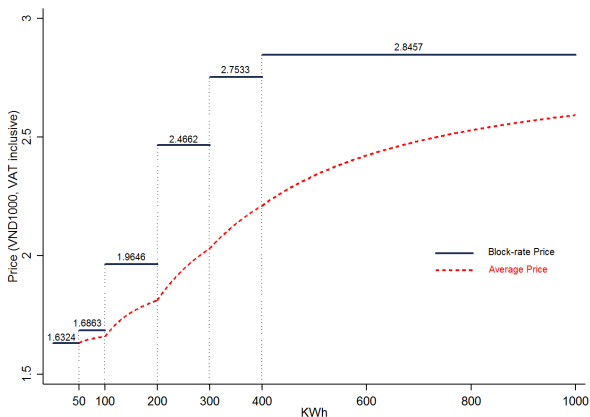
---

<sup>1</sup>Tham khảo: <https://tinyurl.com/ydhhr7k>

# Vấn đề với ước lượng hàm cầu điện sinh hoạt

- ▶ Giá điện sinh hoạt bị quản lý, tính theo mức lũy tiến  $\Rightarrow$  càng dùng nhiều chi phí biên của mỗi Kwh càng đắt.
- ▶ Giá và lượng được xác định đồng thời  $\Rightarrow$  OLS không sử dụng được.

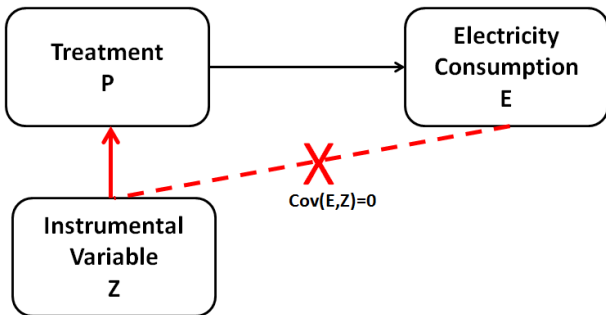
## Giá biên lũy tiến và giá điện trung bình.





Muốn ước lượng hàm cầu điện, chúng ta cần biến ngoại sinh  $Z$  dịch chuyển đường cung điện nhưng không tác động trực tiếp đến cầu điện:

- ▶  $Z$  phải ảnh hưởng đến giá điện
- ▶  $Z$  không ảnh hưởng trực tiếp đến lượng điện sử dụng (sau khi đã kiểm soát tất cả các nhân tố khác!)



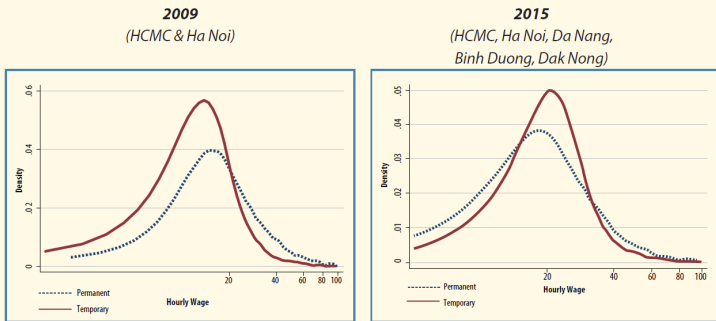
# Các biến dịch chuyển đường cung điện

- ▶ Hộ khẩu (thường trú, tạm trú)
- ▶ Kết nối với đường điện (trực tiếp với công-tơ riêng, hay chung với chủ nhà...)
- ▶ Loại hình thanh toán (trả tiền điện trực tiếp cho công ty điện hay trả cho chủ nhà...)

# Kiểm tra hiệu lực của biến công cụ

- ▶ Điều kiện loại trừ phải thỏa.
- ▶ Không có sự khác biệt mang tính hệ thống giữa các nhóm đối tượng sử dụng điện.
- ▶ Tình trạng cố ý lạm dụng chính sách để hạn chế tiền điện không nghiêm trọng.

**FIGURE 2** Distribution of wages (in thousands of VND per hour) by registration status



# Ước lượng hàm cầu điện bằng 2SLS

Giai đoạn 1: Ước lượng hàm cung với một đến ba biến công cụ

$$\ln P_i = \alpha_0 + \alpha_1 \times HHregis_i + \alpha_2 \times Grid_i + \alpha_3 \times PayMethod_i \\ + \dots + \sum_j X^j_i \times \alpha_j + \eta_i$$

Giai đoạn 2: Ước lượng hàm cầu với biến công cụ

$$\ln E_i = \beta_0 + \beta_1 \times \widehat{\ln P}_i + \beta_2 \times \ln Income_i + \beta_3 \times \ln P_i^s + \sum_j X^j_i \times \beta_j + \varepsilon_i$$

# So sánh giữa ước lượng hàm cầu bằng biến công cụ với ước lượng OLS

Ký hiệu AP và MP cho mô hình tương ứng với mô hình giá trung bình và giá biên.

	<b>OLS-AP</b>	<b>OLS-MP</b>	<b>2SLS-AP</b>	<b>2SLS-MP</b>
lnPrice	0.2740		-0.6573	
lnMP		0.5555		-0.8198
lnIncome	0.0332	0.0221	0.0710	0.0769
lnFuel	0.0496	0.0462	0.0551	0.0592

### 3. Hồi quy hệ phương trình trong trường hợp tổng quát (3SLS)

Giả sử chúng ta có hệ thống phương trình đồng thời bao gồm  $M$  phương trình, trong đó  $X_i$  là vector các biến giải thích của phương trình  $i$ .  $X_i$  có thể bao gồm các biến nội sinh  $y$ , và mỗi phương trình có  $K$  biến giải thích.

$$y_1 = X_1\beta_1 + u_1$$

$$y_2 = X_2\beta_2 + u_2$$

...

$$y_M = X_M\beta_M + u_M$$

viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X_M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_M \end{bmatrix}$$

## Đặc tính của hệ phương trình hồi quy trong trường hợp tổng quát:

- ▶ Các sai số cấu trúc  $u_i$ ,  $u_j$  có thể tương quan chéo giữa các phương trình cấu trúc với nhau, mặc dù chúng không tương quan chuỗi trong cùng một phương trình.

$$E[u_i|X_1, X_2\dots] = 0$$

$$E[u_i u_j | X_1, X_2\dots] = \sigma_{ij}$$

- ▶ Có thể có vấn đề biến nội sinh hoặc tác động nhân quả đồng thời trong cùng một phương trình cấu trúc.

⇒

- ▶ Ước lượng hệ phương trình đồng thời bằng OLS bị chệch và không nhất quán do vấn đề nhân quả đồng thời.
- ▶ Ước lượng các phương trình cấu trúc bằng 2SLS nhất quán nhưng không hiệu quả do vấn đề tương quan chéo giữa các phương trình cấu trúc.

**Hồi quy 3SLS kết hợp giữa hồi quy 2SLS (để xử lý vấn đề nội sinh) và hồi quy với quyền số tổng quát (Generalized Least Square-GLS để xử lý vấn đề tự tương quan)  $\Rightarrow$  Ước lượng 3SLS nhất quán và hiệu quả hơn ước lượng 2SLS.**

Các bước của hồi quy 3SLS đối với hệ phương trình đồng thời:

1. Ước lượng biến nội sinh theo các biến công cụ của từng phương trình cấu trúc. Bước này tương đồng với bước 1 trong hồi quy 2SLS.
2. Ước lượng ma trận quyền số dựa trên các phần dư của hồi quy 2SLS của từng phương trình cấu trúc.
3. Thực hiện hồi quy với quyền số tổng quát (GLS) với ma trận quyền số ở bước 2 và biến nội sinh được dự báo ở bước 1.



## Ví dụ ước lượng 3SLS

Giả sử hệ phương trình đồng thời cung cầu là:

$$qDemand = \beta_0 + \beta_1 price + \beta_2 pcompete + \beta_3 income + u$$

$$qSupply = \beta_4 + \beta_5 price + \beta_6 praw + v$$

Tại trạng thái cân bằng cung cầu,  $qDemand = qSupply$ . Các biến giải thích là:

- ▶ price: giá mặt hàng
- ▶ pcompete: giá hàng thay thế
- ▶ income: thu nhập trung bình
- ▶ praw: giá nguyên liệu sản xuất

Sử dụng bộ dữ liệu mô phỏng supDem.dta. Bộ dữ liệu này được mô phỏng theo mô hình chuẩn là:

$$qDemand = 40 - 1.0price + 0.25pcompete + 0.5income + u$$

$$qSupply = 0.5price - 0.75praw + v$$

với  $u \sim N(0, 3.8)$  và  $v \sim N(0, 2.4)$ .

Ước lượng hệ phương trình trên bằng OLS, 2SLS, 3SLS và so sánh kết quả.

### Regression Results

	OLS b/se	IV b/se	3SLS b/se
<hr/>			
<b>qDemand</b>			
price	0.1186 (0.1716)	-1.0158* (0.3905)	-1.0143** (0.3742)
pcompete	0.0946 (0.1201)	0.3320 (0.1804)	0.2647 (0.1464)
income	0.0785 (0.1160)	0.5091* (0.2003)	0.5299** (0.1898)
Constant	7.5633 (5.0195)	39.8999*** (11.2424)	40.0875*** (10.7707)
<hr/>			
<b>qSupply</b>			
price	0.7247*** (0.1096)	0.5773** (0.1806)	0.5773*** (0.1750)
praw	-0.8675*** (0.1066)	-0.7835*** (0.1355)	-0.7835*** (0.1312)
Constant	-6.9729* (3.3231)	-2.5507 (5.4423)	-2.5507 (5.2731)
<hr/>			
Obs	49.0000	49.0000	49.0000
R2	0.0627	-0.8477	-0.8540
R2-adj			
df(r)	91.0000	91.0000	
SSR	346.4593	682.9428	685.2774

\* p<0.05, \*\* p<0.01, \*\*\* p<0.001

## Trường hợp đặc biệt: Hệ phương trình gần như không tương quan - **Seemingly Unrelated Regressions - SURE**

- ▶ Các phương trình độc lập, không có hiện tượng nhân quả đồng thời.
- ▶ Tuy nhiên sai số giữa các phương trình có tương quan với nhau.

⇒

- ▶ Ước lượng OLS của từng phương trình cấu trúc đều không chệch và nhất quán.
- ▶ Tuy nhiên ước lượng bằng OLS từng phương trình riêng biệt không hiệu quả bằng ước lượng 3SLS.

## Regression Results

	OLS b/se	SURE b/se
<b>qDemand</b>		
price	0.1186 (0.1716)	0.1140 (0.1523)
pcompete	0.0946 (0.1201)	0.0503 (0.0870)
income	0.0785 (0.1160)	0.0990 (0.0851)
Constant	7.5633 (5.0195)	7.8170 (4.6340)
<b>qSupply</b>		
price	0.7247*** (0.1096)	0.5133*** (0.0984)
praw	-0.8675*** (0.1066)	-0.5162*** (0.0792)
Constant	-6.9729* (3.3231)	-1.7256 (3.0634)
Obs	49.0000	49.0000
R2	0.0627	0.0583
R2-adj		
df(r)	91.0000	
SSR	346.4593	348.0760

\*  $p < 0.05$ , \*\*  $p < 0.01$ , \*\*\*  $p < 0.001$

# Hệ phương trình hàm cầu - Almost Ideal Demand System (AIDS)

Dựa trên lý thuyết về tối ưu hóa độ thỏa dụng theo điều kiện ngân sách ràng buộc:

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j + \beta_i \ln \left( \frac{X}{P} \right) + \sum_k \lambda_{ik} H_k + u_i$$

với  $i = 1, \dots, M$  là số hàng hóa trong rổ chi tiêu.  
trong đó:

- ▶  $\omega_i$  là tỷ phần ngân sách cho hàng hóa  $i$
- ▶  $P_j$  là chỉ số giá các mặt hàng tiêu dùng
- ▶  $X$  là tổng chi tiêu
- ▶  $P$  là chỉ số giá
- ▶  $H$  là các đặc tính nhân khẩu học và kinh tế xã hội

## Điều kiện về hệ hàm cầu

- ▶ Tính đồng nhất (homogeneity of degree 0) về giá và tổng chi tiêu: nếu giá và tổng chi tiêu tăng cùng một tỷ lệ thì tiêu dùng không đổi.
- ▶ Tổng tỷ phần ngân sách của tất cả các mặt hàng bằng 1.
- ▶ Tính đối xứng: độ co giãn chéo bằng nhau giữa các phương trình.

Hệ số co giãn co giãn theo thu nhập, co giãn riêng phần, và co giãn chéo được tính như sau:

$$\eta_i = 1 + \frac{\beta_i}{\omega_i}$$

$$\varepsilon_{ii} = -1 + \frac{\gamma_{ii}}{\omega_i} - \beta_i$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \omega_j \beta_i}{\omega_i}$$

## Ví dụ ước lượng hệ hàm cầu chi tiêu với 5 nhóm mặt hàng<sup>2</sup>

Sử dụng bộ dữ liệu demandSystem.dta để ước lượng hệ hàm cầu của 5 nhóm mặt hàng: xăng dầu, điện, nhiên liệu khác, giao thông công cộng, và thực phẩm.

- ▶ Để ước lượng hệ hàm cầu, cần loại một phương trình khỏi hệ để tránh ma trận hiệp phương sai bị suy biến (singular covariance matrix). Ví dụ đối với hệ hàm cầu 5 nhóm mặt hàng, chỉ cần 4 phương trình.
- ▶ Áp các điều kiện ràng buộc:

$$\sum_j \gamma_{ij} = 0$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

---

<sup>2</sup>Tham khảo Chu Phạm Đăng Quang, Luận văn thạc sỹ chính sách công 2017.