Chương Trình Giảng Dạy Kinh tế Fulbright

Học kỳ Thu năm 2012

Các Phương Pháp Phân Tích Định Lượng

LỜI GIẢI ĐỀ NGHỊ BÀI TẬP 3

PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Ngày Phát: **Thứ hai 15/10/2012**
Ngày Nộp: **Thứ hai 22/10/2012**
Bản in nộp lúc **8h20 sáng**, tại Hộp nộp bài tập trong phòng Lab
Bản điện tử gửi lên http://intranet.fetp.edu.vn:81

Bài 1: (10 điểm)
Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào có thể là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tuc, giải thích rõ ràng câu trả lời của bạn:

a. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\forall x\in[0;2]\\ 0\forall\notin[0;2]\end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases}x\forall x\in[0,1]\\ 0\forall\notin[0,1]\end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases}x^2\forall x\in[0;1]\\ 0\forall\notin[0;1]\end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases}4x^3\forall x\in[0;1]\\ 0\forall\notin[0;1]\end{cases}$

e. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\forall x\in[1;2]\\ 0\forall\notin[1;2]\end{cases}$

Đáp án bài 1

Nhắc lại lý thuyết: Một hàm sô f(x) là hàm mật độ xác suất phải thỏa mãn hai điều kiện sau:

$$\begin{cases}f(x)\geq 0\forall x\in R\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\end{cases}$$

a. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\forall x\in[0;2]\\ 0\forall\notin[0;2]\end{cases}$ là hàm mật độ xác suất vì $\begin{cases}f(x)\geq 0\forall x\in R\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}|_0^2=1\end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x \forall x \in [0,1] \\ 0 \forall \notin [0,1] \end{cases}$ không là hàm mật độ xác suất vì $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in R \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 \forall x \in [0;1] \\ 0 \forall \notin [0;1] \end{cases}$ không là hàm mật độ xác suất vì $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in R \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3} < 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 4x^3 \forall x \in [0;1] \\ 0 \forall \notin [0;1] \end{cases}$ là hàm mật độ xác suất vì $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in R \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4}|_0^1 = 1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \forall x \in [1;2] \\ 0 \forall \notin [1;2] \end{cases}$ không là hàm mật độ xác suất vì $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in R \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}|_1^2 = \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$

Bài 2: (20 điểm)

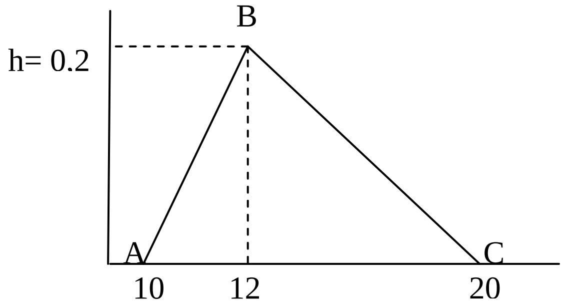
Cho X là một biến ngẫu nhiên tuân theo qui luật phân phối tam giác bất cân xứng trong khoảng từ 10 đến 20. Đỉnh của tam giác phân phối ở tại X = 12. Hãy dùng hình vẽ minh họa, giải thích rõ ràng các tính tóan và các giả định của Anh/Chị để trả lời các câu hỏi dưới đây:

a. Tìm hàm mật độ xác suất của X.

b. Tìm hàm phân phối xác suất tích lũy của X.

c. Hãy tính xác suất để có được một gía trị của X không vượt qua 15.

d. Hãy tính xác suất để có được một gía trị của X trong khoảng từ 11 tới 16



Đáp án bài 2

Gọi *h* là tung độ của đỉnh B, đó cũng chính là chiều cao của ΔABC trong đó tọa độ các đỉnh như sau: A(10; 0), B(12; h), C(20; 0).

Do biến ngẫu nhiên X có quy luật phân phối là ΔABC nên S_{ABC} =1 vậy h = 0,2.

a. Trong [10; 20] hàm mật độ xác suất của X là phương trình của đường thẳng AB và BC

- Phương trình của AB: f(x) = 0,1x – 1
- Phương trình của BC: f(x) = -0,025x + 0,5

Hàm mật độ xác suất của X

$$f(x) = \begin{cases} 0 \forall x < 10 \\ 0,1x - 1 \forall x \in [10,12] \\ -0,025x + 0,5 \forall x \in [12,20] \\ 0 \forall x > 20 \end{cases}$$

b. Hàm phân phối xác suất tích lũy của X

$$F(x) = \begin{cases} 0 \forall x < 10 \\ (0,1x - 1)\dfrac{x-10}{2} \forall x \in [10;12] \\ (0,2 - 0,025x + 0,5)\dfrac{x-12}{2} \forall x \in [12;20] \\ 1 \forall x > 20 \end{cases}$$

c. P(X <15) = P(X < 12) + P(12 < X < 15) = 0,2 + 0,4875=0,6875 = 68,75%

d. P(11<X<16) = P(11 < X < 12) + P(12 < X < 16) = 75%

<u>Bài 3</u>: (20 điểm)

a. Gieo 10 lần một đồng xu cân đối và đồng chất. Gọi X là số lần mặt sấp xuất hiện. Tìm:
   - Phân phối xác suất của X.
   - P(0≤X≤8)
   - Trong trường hợp gieo đồng xu nay 100 lần, hãy tìm kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

b. Gieo liên tiếp hai con xúc sắc cân xứng, đồng chất, cùng khối lượng. Gọi X là tổng số nút xuất hiện ở mặt trên của hai con xúc sắc này. Hãy:
   - Lập bảng phân phối xác suất của X.
   - Tính các giá trị thống kê: phương sai, độ lệch chuẩn, kỳ vọng (trung bình), trung vị và yếu vị của X.

<u>Đáp án bài 3</u>

a. Khi gieo một đồng xu cân đối và đồng chất thì kết quả thu được chỉ là một trong hai khả năng: mặt sấp hoặc mặt ngửa. Như vậy phân phối xác suất của việc tung đồng xu có dạng là một phân phối nhị thức. Do đồng xu cân xứng và đồng chất nên xác suất được mặt sấp (biến X) là 0,5.
   - Công thức của phân phối nhị thức của biến X với n = 10 và p = 0,5 có dạng:

$$P(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{10}^k (0,5)^k (1-0,5)^{10-k} = C_{10}^k (0,5)^{10}$$

$$P(x \le X) = \sum_{k=0}^{X} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{X} C_{10}^k (0,5)^k (1-0,5)^{10-k} = \sum_{k=0}^{X} C_{10}^k (0,5)^{10}$$

   - Xác suất để có tối đa 8 lần có mặt sấp

$$P(0 \le x \le 8) = 1 - P(x = 9) - P(x = 10) = 1 - 11(0,5)^{10}$$

   - Trong trường hợp gieo đồng xu 100 lần

     - Kỳ vọng μ = np =100*0,5 = 50
     - Phương sai σ^2 = np(1-p) = 100*0,5*$(1-0,5)^2$= 25
     - Độ lệch chuẩn: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ = 5

b. Miền giá trị của biến X là tập D = (2,3,4,5, 6, 7, 8, 9,10,11,12)

Đối với X= 2 = 1+1 : đây là tổ hợp của hai nút 1 xuất hiện ở mặt trên mỗi con xúc xắc. Xác suất để nút một xuất hiện trên mỗi con xúc xắc là $\frac{1}{6}$, do đó

P(X=2) = $\frac{1}{6}*\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

Tương tự ta có: P(X=3) = $\frac{1}{6}*\frac{1}{6}+\frac{1}{6}*\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$ P(X=4) = $\frac{3}{36}$

P(X=5) $\frac{4}{36}$ P(X=6) = $\frac{5}{36}$ P(X=7)= $\frac{6}{36}$

Do tính đối xứng nên P(X=8) = P(X=6) = $\frac{5}{36}$

P(X=9) = P(X=5)= $\frac{4}{36}$ P(X=10) = P(X=4) = $\frac{3}{36}$

P(X=11) =P(X=3) = $\frac{2}{36}$ P(X=12) = P(X=1) = $\frac{1}{36}$

- Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- Từ bảng phân phối xác suất ở trên và dựa vào tính đối xứng ta có:
- Trung bình = Trung vị = Yếu vị = 7
- Áp dụng công thức ta có phương sai = 5,833
- Độ lệch chuẩn = 2,415

<u>Bài 4</u>: (20 điểm)

Một đường ống dẫn dầu dài 2 km. Khoảng cách từ một đầu ống đến lỗ rò rỉ (tinh bằng km) có thể diễn tả bằng một biến ngẫu nhiên liên tục với phân phối đều. Hãy tìm:

a. Hàm mật độ xác suất.
b. Xác suất để có một lỗ rò rỉ trong khoảng cách từ 0,5 km đến 1,5 km kể tù đầu ống.
c. Hàm phân phối xác suất tích lũy.
d. Dùng hàm phân phối xác suất tích lũy ở câu (c) để tính xác suất trong câu (b). So sánh hai kết quả tìm được.

<u>Đáp án bài 4</u>

a. Do X là biến ngẫu nhiên lien tục có phân phối đều trên [0,2] nên hàm phân phối xác suất có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}\forall x\in[0;2]\\ 0\forall\notin[0;2]\end{cases}$$

b. Xác suất để có một lỗ rò rỉ trong khoảng cách tù 0,5km đến 1,5km kể từ đầu ống chính là diện tích hình chữ nhật có chiều cao = ½, chiều dài = 1,5 – 0,5 = 1. Hay:

P(0,5 < X < 1,5) = 1*1/2 = 1/2

c. Hàm phân phối xác suất tích lũy của X

$$F(x)=\begin{cases}0\forall x<0\\ \int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}x\in[0;2]\\ 1\forall x>2\end{cases}$$

d. P(0,5 <X < 1,5) = F(1,5) – F(0,5) = $\frac{1,5}{2}-\frac{0,5}{2}=\frac{1}{2}$, kết quả này hoàn toàn giống với kết quả trong câu (b)

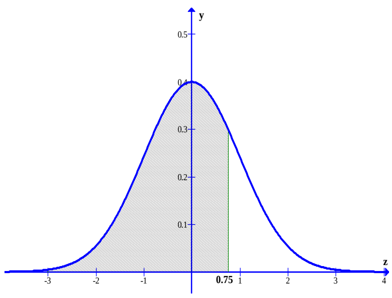
<u>Bài 5</u>: (10 điểm)

Cho Z là một biến ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn hóa. Tìm:

a. P(Z <0,75)
b. P(Z> - 0,40)
c. P(0,60 < Z <1,28)
d. P(- 0,52 < Z < 0,68)
e. Tìm Z_0 sao cho P(Z >Z_0) = 0,068

<u>Đáp án bài 5</u>

Tìm diện tích của đường cong chuẩn chuẩn hóa

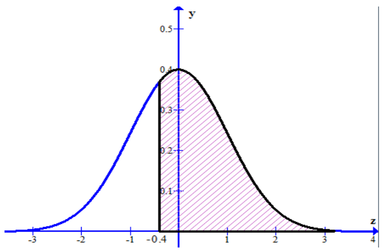


a. P(Z<0.75) = NORMSDIST(0.75) = 0.7734

Hoặc tra bảng phân phối Z

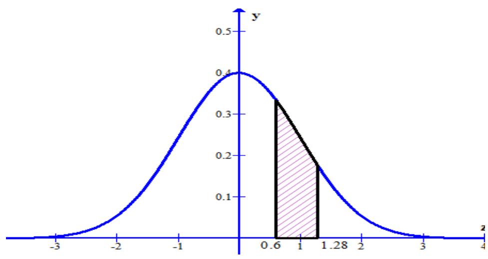
P(Z <0.75) = P(Z<0) + P(0<Z<0.75) =

= 0.5 + 0.2734 = 0.7734.



b. P(Z>-0.40) = 1 - P(Z<-0.40) = 1-NORMSDIST(-0.4)

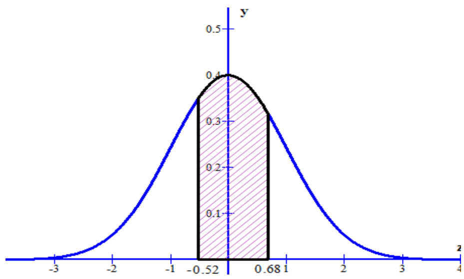
= 1-0.3446 = 0.6554



c. P(0,60 < Z < 1,28) = P(Z < 1,28) - P(Z < 0,60) =

= NORMSDIST(1.28) -NORMSDIST(0.6) =

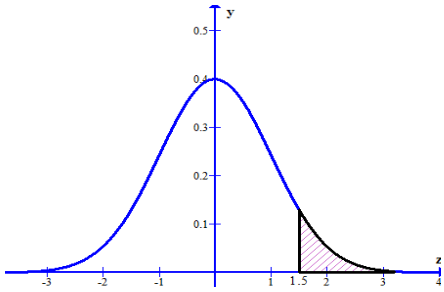
= 0.8997-0.7257=0.174



d. P(-0.52<Z<0.68)=P(Z<0.68)-P(Z<-0.52)=

= NORMSDIST(0.68)-NORMSDIST(-0.52)=

= 0.7517-0.3015=0.4502



e. $P(Z > Z_0) = 0{,}068$ nên $P(Z < Z_0) = 1-P(Z > Z_0) = 1- 0{,}068 = 0{,}932$

Tra bảng ta có $Z_0 = 1{,}49$ hoặc

Z_0 = NORMSINV(0.932) = 1.49

<u>Bài 6</u>: (20 điểm)

Điểm thi cuối kỳ môn học Các phương pháp định lương năm 20XX ở trường Fulbright tuân theo phân phối chuẩn với điểm trung bình là 60 và độ lệch chuẩn là 15.

a. Tìm tỉ lệ số sinh viên có điểm thi cuối kỳ từ 85 đến 95
b. Tìm ngưỡng điểm cho 10% số sinh viên xuất sắc nhất
c. Tìm ngưỡng điểm cho 10% số sinh viên có điểm thấp nhất lớp.

<u>Đáp án bài 6</u>

a. $P(85 < X < 95) = P\left(\frac{85-60}{15} < \frac{X-60}{15} < \frac{95-60}{15}\right) = P(1{,}67 < Z < 2{,}33)$

Tra bảng chuẩn hóa hoặc dùng Excel ta co kết quả

$P(85 < X < 95) = P(1{,}67 < Z < 2{,}33) = 0{,}9901 - 0{,}9575 = 0{,}0376 = 3{,}76\%$

b. Tìm P_{90} sao cho $P(X > P_{90}) = 0{,}10$.

Ta có $P(X > P_0) = P\left(\frac{X-60}{15} > \frac{P_{90}-60}{15}\right) = P(Z>Z_{90}) = 0{,}10$

$\Rightarrow P(Z < Z_{90}) = 1- P(Z > Z_{90}) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$

Tra bảng chuẩn hóa hoặc dùng lệnh NORMSINV trong Excel ta có $Z_{90} = 1{,}28$

Do đó $\frac{P_{90}-60}{15} = 1{,}28 \Rightarrow P_{90} = 79{,}2$

Như vậy có 10% số sinh viên trong lớp có điểm thi cuối kỳ trên 79,2.

c. Tương tự câu (b) ta phải đi tìm P_{10} sao cho $P(X < P_{10}) = 0{,}10$.

Ta có $P(X < P_{10}) = P\left(\frac{X-60}{15} < \frac{P_{10}-60}{15}\right) = P(Z < Z_{10}) = 0{,}10$

Tra bảng chuẩn hóa hoặc dùng lệnh NORMSINV trong Excel ta có $Z_0 = -1{,}28$

Do đó $\frac{P_{10}-60}{15} = -1{,}28 \Rightarrow P_{10} = 40{,}8$

Như vậy có 10% số sinh viên trong lớp có điểm thi cuối kỳ dưới 40,8.