Chương Trình Giảng Dạy Kinh tế Fulbright

Học kỳ Thu năm 2013

Các Phương Pháp Phân Tích Định Lượng

GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP 3

PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Ngày Phát: Thứ Ba 15/10/2013

Ngày Nộp: Thứ Ba 22/10/2013

Bản in nộp lúc **8h20 sáng**, tại Hộp nộp bài tập trong phòng Lab

Bản điện tử gửi lên http://fetp.edu.vn

Bài 1: (20 điểm)

a. Trong một hộp có 5 bóng đèn, biết rằng trong đó có 2 bóng tốt và 3 bóng hỏng. Người ta chọn từng bóng để thử cho đến khi lấy được 2 bóng tốt thì dừng. Gọi X là số lần thử cần thiết.
   - Tìm phân phối xác suất của X?
   - Trung bình cần thử bao nhiêu lần?

b. Gieo một đồng xu cân xứng, đồng chất, cùng khối lượng hai lần liên tiếp (đồng xu này có hai mặt là mặt "bông lúa" và mặt "quốc huy"). Hãy mô tả không gian mẫu của thí nghiệm nói trên. Gọi X là số lần mặt "quốc huy" xuất hiện. Hãy:
   - Lập bảng phân phối xác suất của X.
   - Vẽ đồ thị phân phối xác suất của X.

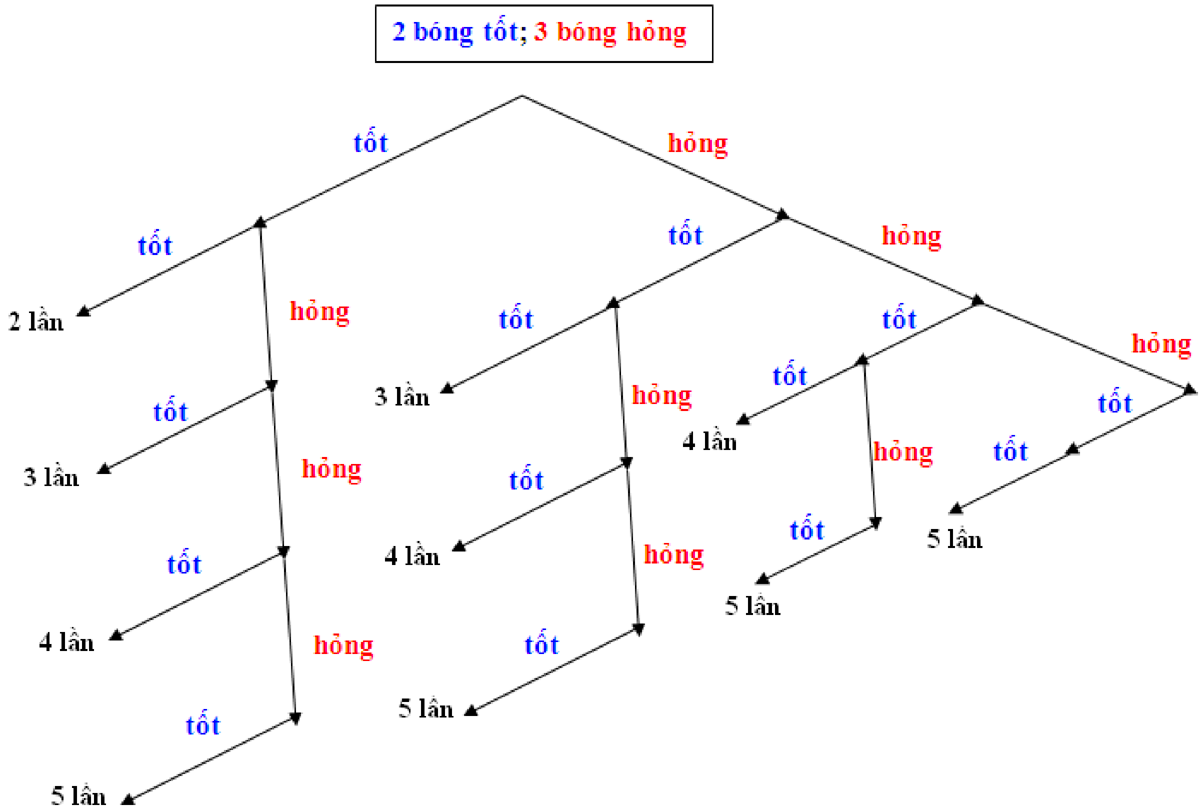
Đáp án:

a.

Cách 1: Sử dụng sơ đồ cây

Việc chọn các bóng để thử cho đến khi lấy được 2 bóng tốt có nhiều khả năng xảy ra. Với mỗi khả năng, việc thử bóng được thực hiện bằng cách lần lượt lấy các bóng trong hộp ra để xác định xem là bóng tốt hay bóng hỏng. Việc thử sẽ dừng lại cho đến khi cả hai bóng tốt đều đã được lấy ra khỏi hộp. Số lần thử (X) chính là tổng số bóng được lấy ra cho khả năng đó, bao gồm cả bóng tốt và bóng hỏng.

Trong hộp có tất cả 5 bóng, bao gồm 2 bóng tốt và 3 bóng xấu. Như vậy, phải thử nhiều nhất là 5 lần và ít nhất là 2 lần thì mới có thể lấy được đủ 2 bóng tốt. Ta vẽ được sơ đồ cây như sau:



• Phân phối xác suất của X

Có tất cả 10 khả năng có thể xảy ra, vậy ta lập được bảng phân phối xác suất của X như sau:

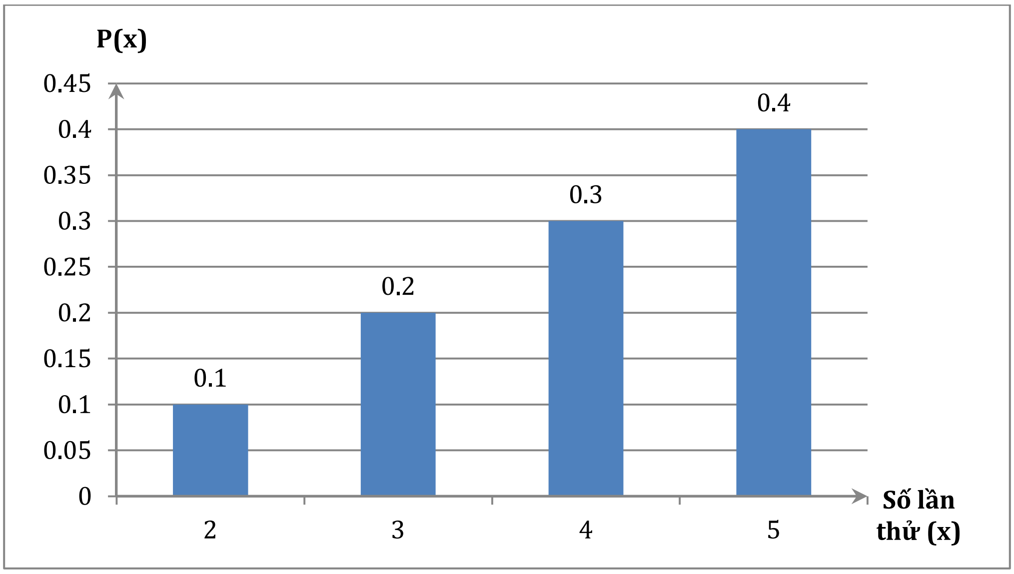
X (số lần thử)	2	3	4	5
P(x)	1/10 = 0,1	2/10 = 0,2	3/10 = 0,3	4/10 = 0,4

Cách 2: Liệt kê các trường hợp

Số lần thử (X)	Thứ tự thử bóng	Tần suất
2	tốt->tốt	1
3	hỏng->tốt->tốt tốt->hỏng->tốt	2
4	hỏng->hỏng->tốt->tốt hỏng->tốt->hỏng->tốt tốt->hỏng->hỏng->tốt	3
5	hỏng->hỏng->hỏng->tốt->tốt hỏng->hỏng->tốt->hỏng ->tốt hỏng-> tốt->hỏng->hỏng-> tốt tốt->hỏng->hỏng->hỏng->tốt	4
Tổng		10

Từ đó, ta cũng lập được Bảng phân phối xác suất của X như cách 1.

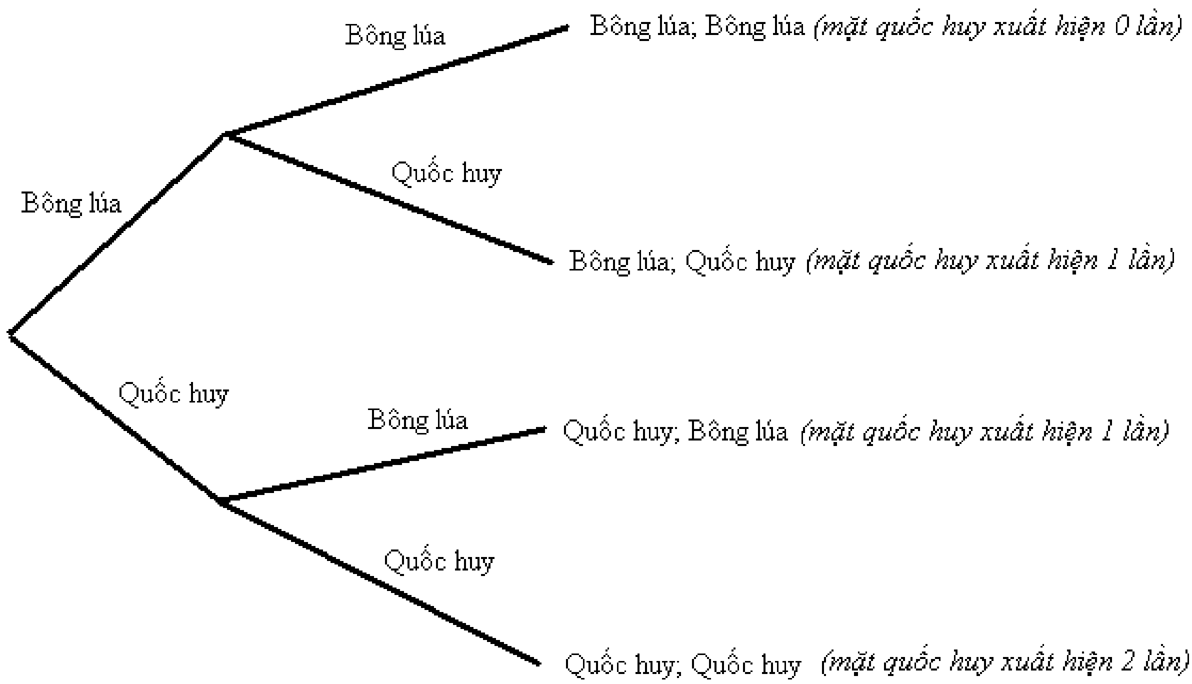
Đồ thị phân phối xác suất của X



- Trung bình cần thử số lần là: 2*0,1 + 3*0,2 + 4*0,3 + 5*0,4 = 4 (lần)

b.

- Ta lập được sơ đồ như sau:



Vậy không gian mẫu của thí nghiệm bao gồm 4 biến cố với kết quả như sau:

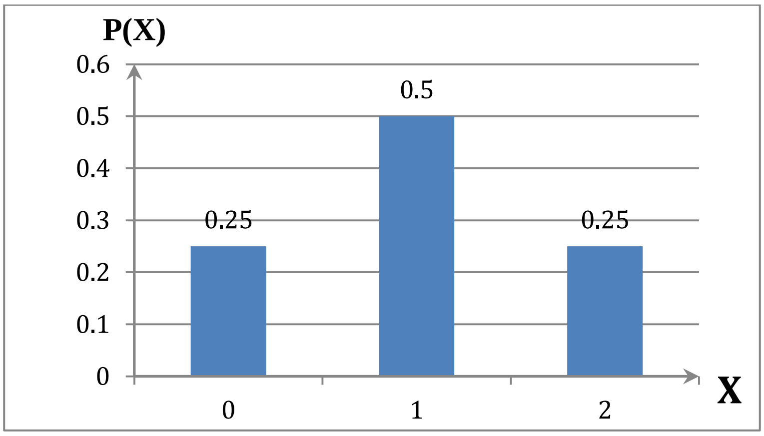
{(Bông lúa; Bông lúa) ; (Bông lúa; Quốc huy) ; (Quốc huy; Bông lúa) ; (Quốc huy; Quốc huy)}

• Bảng phân phối xác suất của X (số lần mặt quốc huy xuất hiện):

Có tất cả 4 khả năng có thể xảy ra, vậy ta lập được bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	0	1	2
P(X)	1/4 = 0,25	2/4 = 0,5	1/4 = 0,25

Đồ thị phân phối xác suất của X.



<u>Bài 2</u>: (10 điểm)

Cho X là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}0\forall x\le 1\\ ax^2\forall 1<x<3\\ 0\forall x\ge 3\end{cases}$$

Trong đó a là tham số.

a. Tìm a?
b. Tính xác suất để x $\in$ [-1; 2]

<u>Đáp án:</u>

a. Tìm a:

Để f(x) là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên liên tục X, thì:

- Điều kiện 1: f(x) $\ge$ 0, $\forall$ x$\in$ [min;max]
- Điều kiện 2: $\int_{min}^{max} f(x)dx = 1$

Điều kiện 1 xảy ra $\Leftrightarrow$ $ax^2 \ge 0 \ \forall 1<x<3$

$\Leftrightarrow$ a $\ge$ 0 **(1)**

Điều kiện 2 xảy ra $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{+\infty} f(x)dx=1$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{1} 0.dx + \int_{1}^{3} ax^2 dx + \int_{3}^{+\infty} 0.dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{26} \qquad \textbf{(2)}$$

Từ (1) và (2) => a = 3/26

b. Tính xác suất để x $\in$ [-1; 2]

$$P(x \in [-1; 2]) = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 0.dx + \int_{1}^{2} \frac{3}{26} x^2 dx$$

$$= \frac{3}{26}.\left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{2} = \frac{3}{26}.\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{7}{26}$$

<u>Bài 3</u>: (20 điểm)

Cho X là một biến ngẫu nhiên tuân theo qui luật phân phối tam giác bất cân xứng trong khoảng từ 10 đến 20. Người ta quan sát được sự kiện X = 12 xuất hiện nhiều lần nhất. Hãy dùng hình vẽ minh họa, giải thích rõ ràng các tính toán và các giả định của Anh/Chị để trả lời các câu hỏi dưới đây:

a. Tìm hàm mật độ xác suất của X.

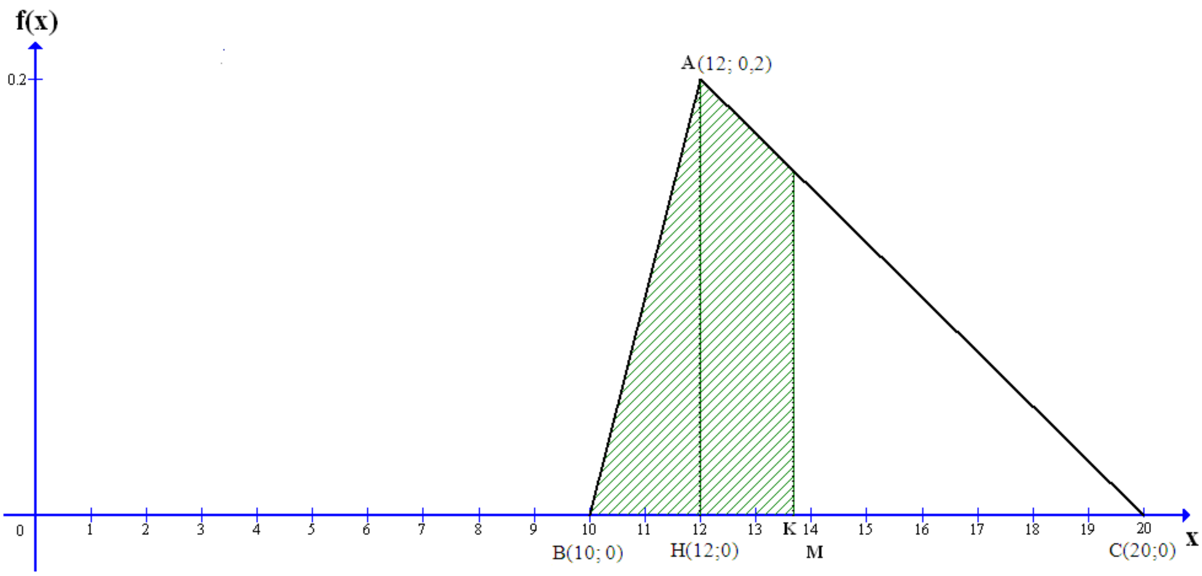
b. Tìm hàm phân phối xác suất tích lũy của X.

c. Tìm trung vị của X.

d. Tìm trung bình của X.

Đáp án:

a. Tìm hàm mật độ xác suất của X.



X là một biến ngẫu nhiên tuân theo qui luật phân phối tam giác bất cân xứng trong khoảng từ 10 đến 20, như vậy một cạnh của tam giác có hai đỉnh B và C tương ứng với hoành độ lần lượt là 10 và 20. Sự kiện X = 12 xuất hiện nhiều lần nhất => X=12 chính là yếu vị của phân phối, do đó đỉnh A còn lại của tam giác có hoành độ là 12. Vậy phân phối xác suất của X có dạng là tam giác ABC như hình trên. Tam giác này có đường cao AH với điểm H nằm trên cạnh BC.

Ta có $P(10 \le x \le 20) = 1 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = 1$

$\Rightarrow AH = \frac{2}{20-10} = 0.2$

- Vậy ta có tọa độ các điểm là: A(12; 0,2); B(10; 0); C(20;0); H(12;0)

=>xây dựng được phương trình đường thẳng đi qua điểm A và B là (d1): *y = 0,1x -1*

và phương trình đường thẳng đi qua điểm A và C là (d2): *y = -0,025x + 0,5*

-Từ đó ta có hàm mật độ xác suất là:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x - 1 & \forall x \in [10;12] \\ -0{,}025x + 0{,}5 & \forall x \in [12;20] \\ 0 & \forall x \notin [10;20] \end{cases}$$

b. Tìm hàm phân phối xác suất tích lũy của X.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \forall x \quad <10 \\ \int_{10}^{x}(0,1t-1)dt & \forall x \quad \in[10;12] \\ \int_{10}^{12}(0,1t-1)dt+\int_{12}^{x}(-0,025t+0,5)dt & \forall x \quad \in[12;20] \\ 1 & \forall x \quad >20 \end{cases}$$

$$=> F(x)=\begin{cases} 0 & \forall x \quad <10 \\ 0,05x^2-x+5 & \forall x \quad \in[10;12] \\ 0,2+\int_{12}^{x}(-0,025t+0,5)dt & \forall x \quad \in[12;20] \\ 1 & \forall x \quad >20 \end{cases}$$

$$=> F(x)=\begin{cases} 0 & \forall x \quad <10 \\ 0,05x^2-x+5 & \forall x \quad \in[10;12] \\ -0,0125x^2+0,5x-4 & \forall x \quad \in[12;20] \\ 1 & \forall x \quad >20 \end{cases}$$

c. Tìm trung vị của X.

Trung vị chia tam giác ABC ra thành hai phần có diện tích bằng nhau và bằng 0,5. Gọi trung vị của X là K. Nhận thấy diện tích ΔAHB = 0,2*(12-10)/2 = 0,2 < 0,5 nên K phải nằm bên phải so với H, tức K thuộc đoạn HC => K $\in[12;20]$

Để K là trung vị thì ⇔ F(K) = 0,5

⇔ F(K) = $-0,0125K^2+0,5K-4=0,5$

⇔ $-0,0125K^2+0,5K-4,5=0$

⇔ K = 13,675 hoặc K = 26,325

⇔ K = 13,675 (vì K $\in[12;20]$)

d. Tìm trung bình của X.

Gọi trung bình của X là M

Vậy M = $\int_{10}^{20}xf(x)dx=\int_{10}^{12}xf(x)dx+\int_{12}^{20}xf(x)dx$

$= \int_{10}^{12} x(0,1x - 1)dx + \int_{12}^{20} x(-0,025x + 0,5)dx$

$= \int_{10}^{12} (0,1x^2 - x)dx + \int_{12}^{20} (-0,025x^2 + 0,5x)dx$

$= \left(0,1\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{10}^{12} + \left(-0,025\frac{x^3}{3} + 0,5\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{12}^{20}$

$= \left(0,1\frac{12^3}{3} - \frac{12^2}{2}\right) - \left(0,1\frac{10^3}{3} - \frac{10^2}{2}\right) + \left(-0,025\frac{20^3}{3} + 0,5\frac{20^2}{2}\right) - \left(-0,025\frac{12^3}{3} + 0,5\frac{12^2}{2}\right)$

= 14

<u>Bài 4</u>: (20 điểm)

Một đường hầm vượt sông có chiều dài 1km. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ khoảng cách từ một miệng hầm tới vị trí một xe ô tô bị sự cố trong đường hầm. Giả sử rằng xác suất để xảy ra sự cố của một chiếc xe trong mọi đoạn có chiều dài bằng nhau đều như nhau. Như vậy X có thể diễn tả bằng một biến ngẫu nhiên liên tục với phân phối đều. Hãy tìm:

a. Hàm mật độ xác suất.

b. Xác suất để có một ô tô bị sự cố trong khoảng cách từ 0,2 km đến 0,8 km kể từ một miệng hầm.

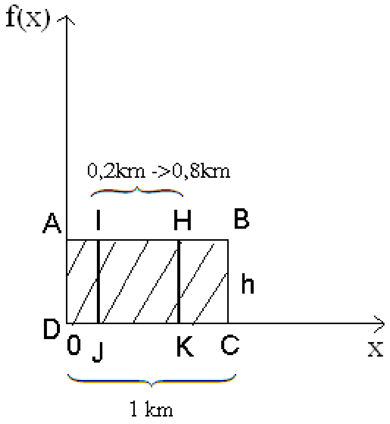
c. Hàm phân phối xác suất tích lũy.

d. Dùng hàm phân phối xác suất tích lũy ở câu (c) để tính xác suất trong câu (b). So sánh hai kết quả tìm được.

Đáp án:

a. Hàm mật độ xác suất.

Ta có thể mô hình hóa hàm mật độ xác suất như sau:



Trong đó DC = 1 (km)

F(x) = S_{ABCD} = AD.DC = 1

=>AD.1 =1

=>AD =1

Vậy hàm mật độ xác suất sẽ có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0,1] \\ 0 & \forall x \notin [0,1] \end{cases}$$

b. Xác suất để có một ô tô bị sự cố trong khoảng cách từ 0,2 km đến 0,8 km kể từ một miệng hầm.

Xác suất để có một ô tô bị sự cố trong khoảng cách từ 0,2 km đến 0,8 km kể từ một miệng hầm là:

S_{IJKH} = IJ.IH = 1 x (0,8 – 0,2) = 0,6

c. Hàm phân phối xác suất tích lũy.

Dựa vào hàm mật độ xác suất f(x), ta có hàm xác suất tích lũy của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \forall x < 0 \\ \int_0^x dt \forall t \in [0,1] \\ 1 \forall x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \forall x < 0 \\ x \forall x \in [0,1] \\ 1 \forall x > 1 \end{cases}$$

d. Dùng hàm phân phối xác suất tích lũy ở câu (c) để tính xác suất trong câu (b). So sánh hai kết quả tìm được.

Xác suất để có một ô tô bị sự cố trong khoảng cách từ 0,2 km đến 0,8 km kể từ một miệng hầm là:

$P(0,2 \leq x \leq 0,8) = F(0,8) – F(0,2)$

$= 0,8 - 0,2$

$= 0,6$

Kết quả này giống với kết quả đã tính toán được ở câu (b).

<u>Bài 5</u>: (10 điểm)

Cho Z là một biến ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn hóa. Tìm:

a. P(Z < - 0,7)
b. P(Z > 0,45)
c. P(0,3 < Z < 1,28)
d. P(- 0,59 < Z < 0,75)
e. Tìm Z_0 sao cho $P(Z > Z_0) = 0,068$

<u>Đáp án:</u>

a. P(Z < - 0,7)

Tra bảng phân phối chuẩn hóa hoặc sử dụng hàm Normdist trong Ms Excel 2007 như sau:
NORMDIST(-0.7,0,1,1) = 0,241963652

b. P(Z > 0,45)

P (Z>0,45) = 1 - P (Z≤0,45)

Tính tương tự câu (a), tra bảng phân phối chuẩn hóa hoặc sử dụng hàm Normdist trong Ms Excel 2007 để tính P(Z≤0,45) như sau: NORMDIST(0.45,0,1,1)

=>P(Z≤0,45) = 0,67364478

=> P (Z>0,45) = 1 – 0,67364478 = 0,32635522

c. P(0,3 < Z < 1,28)

Tra bảng phân phối chuẩn hóa hoặc cũng sử dụng hàm Normdist trong Ms Excel 2007 để tính và ra kết quả như sau:

P(0,3 < Z < 1,28) = P(Z<1,28) – P(Z<0,3)

= 0,8997 – 0,617911422

= 0,28181601

d. P(- 0,59 < Z < 0,75)

Ta cũng tra bảng phân phối chuẩn hóa hoặc sử dụng hàm Normdist trong Ms Excel 2007 để tính và ra kết quả như sau:

P(-0,59<Z<0,75) = *P(Z<0,75) – P(Z<-0,59)*

= 0,773372648 – 0,277595325

= 0,495777323

e. Tìm Z_0 sao cho $P(Z > Z_0) = 0,068$

=>$P(Z<Z_0)$=1- 0,068 = 0,932

Tra bảng phân phối chuẩn hóa, hoặc sử dụng hàm Normsinv trong Excel ta có $Z_0 = 1,49$

Bài 6: (20 điểm)

Điểm thi cuối kỳ môn học Các phương pháp định lượng năm 20XX ở trường Fulbright tuân theo phân phối chuẩn với điểm trung bình là 75 và độ lệch chuẩn là 12.

a. Tìm tỉ lệ số sinh viên có điểm thi cuối kỳ từ 85 đến 95

b. Tại điểm số là bao nhiêu thì có 90% số học viên đạt điểm thấp hơn mức đó

c. Nếu định nghĩa điểm C là mức điểm mà có 90% số học viên đạt trên mức đó. Tìm mức điểm C cho lớp nói trên.

Đáp án:

a. Tìm tỉ lệ số sinh viên có điểm thi cuối kỳ từ 85 đến 95

Đưa về xác suất phân phối chuẩn hóa, ta có:

P(85<x<95) $=P(\frac{85-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{95-\mu}{\sigma})$

$= P(\frac{85-75}{12} < Z < \frac{95-75}{12})$

= P(0,833<Z< 1,667)

=P(Z<1,667) - P(Z<0,833) (tra bảng phân phối chuẩn hóa hoặc sử dụng hàm Normsdist trong Ms Excel 2007)

= 0,952209648- 0,797671619

= 0,154538029

b. Tại điểm số là bao nhiêu thì có 90% số học viên đạt điểm thấp hơn mức đó

=>tương đương với tìm Z_0 để xác suất các sinh viên có số điểm thấp hơn Z_0 là 90%

=>$P(Z<Z_0) = 0,9$

Tra bảng phân phối chuẩn hóa, hoặc sử dụng hàm Normsdist trong Excel ta có Z_0=1,28

=>X_0= 12* Z_0 + 75 = 12*1,28 + 75 = 90,36

Vậy ngưỡng điểm cho 10% số sinh viên xuất sắc nhất lớp là 90,36 điểm.

c. Nếu định nghĩa điểm C là mức điểm mà có 90% số học viên đạt trên mức đó. Tìm mức điểm C cho lớp nói trên.

=>tương đương với tìm Z_0 để xác suất các sinh viên có số điểm thấp hơn Z_0 là 10%

=>$P(Z<Z_0) = 0,1$
=>$P(Z>-Z_0) =0,1$
=>$P(Z<-Z_0)=1-0,1 = 0,9$

Tra bảng phân phối chuẩn hóa, hoặc sử dụng hàm Normsdist trong Excel ta có

-Z_0=1,28 =>Z_0=-1,28
=>X_0= 12* Z_0 + 75 = 12*(-1,28) + 75 = 59,64

Vậy ngưỡng C là: 59,64 điểm.

***
*