

Chương trình Giảng dạy Kinh tế Fulbright

Học kỳ Thu năm 2014

Các Phương Pháp Phân Tích Định Lượng

GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP 2

XÁC SUẤT

Ngày Phát: Thứ Ba 07/10/2014

Ngày Nộp: Thứ Ba 14/10/2014

Bài 1: (20 điểm)

Kết quả thống kê về số lượng trường học phân theo các địa phương thuộc khu vực Đông Nam Bộ tại thời điểm 30/09/2013 được cho trong bảng sau:

(Đơn vị tính : Trường)

Các địa phương thuộc khu vực Đông Nam Bộ	Tiểu học	Trung học cơ sở	Trung học phổ thông
Bình Phước	171	96	25
Tây Ninh	265	106	30
Bình Dương	136	66	22
Đồng Nai	302	168	50
Bà Rịa – Vũng Tàu	144	85	29
TP. Hồ Chí Minh	476	255	120

Tìm xác suất để:

- Một trường được chọn ngẫu nhiên là trường tiểu học.
- Một trường tiểu học được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Tây Ninh.
- Một trường được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Bình Dương hoặc TP. Hồ Chí Minh.
- Một trường trung học phổ thông được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu.
- Một trường được chọn ngẫu nhiên là trường trung học cơ sở thuộc tỉnh Đồng Nai hoặc Bình Phước.

(Kết quả tỉ lệ % chỉ cần lấy 1 con số phần thập phân)

Đáp án bài 1:

Biến đổi Bảng số liệu ta được:

Các địa phương thuộc khu vực Đông Nam Bộ	Tiểu học (TH)	Trung học cơ sở (THCS)	Trung học phổ thông (THPT)	Tổng
Bình Phước (BP)	171	96	25	292
Tây Ninh (TN)	265	106	30	401

Bình Dương (BD)	136	66	22	224
Đồng Nai (DN)	302	168	50	520
Bà Rịa – Vũng Tàu (BV)	144	85	29	258
TP. Hồ Chí Minh (HCM)	476	255	120	851
Tổng	1494	776	276	2546

Từ bảng số liệu trên, ta có bảng chuyển đổi xác suất như sau:

Các địa phương thuộc khu vực Đông Nam Bộ	Tiểu học (TH)	Trung học cơ sở (THCS)	Trung học phổ thông (THPT)	Tổng
Bình Phước (BP)	6,7%	3,8%	1,0%	11,5%
Tây Ninh (TN)	10,4%	4,2%	1,2%	15,8%
Bình Dương (BD)	5,3%	2,6%	0,9%	8,8%
Đồng Nai (DN)	11,9%	6,6%	2,0%	20,4%
Bà Rịa – Vũng Tàu (BR)	5,7%	3,3%	1,1%	10,1%
TP. Hồ Chí Minh (HCM)	18,7%	10,0%	4,7%	33,4%
Tổng	58,7%	30,5%	10,8%	100,0%

Tìm xác suất để:

a. Một trường được chọn ngẫu nhiên là trường tiểu học:

$$P(\text{TH}) = 1494/2546 = 58,7\%$$

b. Một trường tiểu học được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Tây Ninh:

$$P(\text{TN} \setminus \text{TH}) = P(\text{TN} \cap \text{TH}) / P(\text{TH}) = 10,4\% / 58,7\% = 17,7\%$$

c. Một trường được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Bình Dương hoặc TP. Hồ Chí Minh:

$$P(\text{BD} \cup \text{HCM}) = P(\text{BD}) + P(\text{HCM}) = 8,8\% + 33,4\% = 42,2\%$$

d. Một trường trung học phổ thông được chọn ngẫu nhiên thuộc tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu:

$$P(\text{BR} \setminus \text{THPT}) = P(\text{BR} \cap \text{THPT}) / P(\text{THPT}) = 1,1\% / 10,8\% = 10,5\%$$

e. Một trường được chọn ngẫu nhiên là trường trung học cơ sở thuộc tỉnh Đồng Nai hoặc Bình Phước:

$$P(\text{DN} \cap \text{THCS}) + P(\text{BP} \cap \text{THCS}) = 6,6\% + 3,8\% = 10,4\%$$

Bài 2: (20 điểm)

Tỉ lệ các doanh nghiệp Nhà nước đang hoạt động tại thời điểm 31/12/2012 phân theo quy mô lao động được thể hiện ở bảng sau:

Quy mô lao động	Dưới 50 người	50–199 người	200–299 người	300–499 người	500–999 người	Trên 1000 người
Tỉ lệ	23%	37%	10%	11%	10%	9%

Gọi:

- **A** là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động dưới 300 người”
- **B** là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động từ 500 người trở lên”

- Tìm xác suất để biến cố A xảy ra
- Tìm xác suất để biến cố B xảy ra
- Mô tả biến cố phụ của biến cố A
- Tìm xác suất để biến cố phụ của biến cố A xảy ra
- Mô tả biến cố giao của biến cố A và B
- Tìm xác suất để biến cố giao xảy ra
- Mô tả biến cố hợp của biến cố A và B
- Tìm xác suất để biến cố hợp xảy ra
- A và B có là các biến cố xung khắc không?
- A và B có là các biến cố đầy đủ không?

Đáp án bài 2:

Quy mô lao động	Dưới 50 người	50–199 người	200–299 người	300–499 người	500–999 người	Trên 1000 người
Tỉ lệ	23%	37%	10%	11%	10%	9%
Biến cố	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6

Gọi X_1 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động dưới 50 người”

$$\Rightarrow P(X_1) = 23\%$$

Gọi X_2 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động 50–199 người”

$$\Rightarrow P(X_2) = 37\%$$

Gọi X_3 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động 200–299 người”

$$\Rightarrow P(X_3) = 10\%$$

Gọi X_4 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động 300–499 người”

$$\Rightarrow P(X_4) = 11\%$$

Gọi X_5 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động 500–999 người”

$$\Rightarrow P(X_5) = 10\%$$

Gọi X_6 là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động trên 1000 người”

$$\Rightarrow P(X_6) = 9\%$$

$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ là hệ đầy đủ các biến cố.

a. Tìm xác suất để biến cố A xảy ra:

$$P(A) = P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) = 23\% + 37\% + 10\% = 70\%$$

b. Tìm xác suất để biến cố B xảy ra:

$$P(B) = P(X_5) + P(X_6) = 10\% + 9\% = 19\%$$

c. Mô tả biến cố phụ của biến cố A:

Gọi A^c là biến cố phụ của biến cố A

A^c là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động từ 300 người trở lên”

$$A^c = X_4 \cup X_5 \cup X_6$$

d. Tìm xác suất để biến cố phụ của biến cố A xảy ra:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 70\% = 30\%$$

e. Mô tả biến cố giao của biến cố A và B

Biến cố giao của biến cố A và B là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động dưới 300 người đồng thời có quy mô lao động từ 500 người trở lên”. Không có một doanh nghiệp Nhà nước nào thỏa mãn điều kiện trên nên $A \cap B = \emptyset$ (rỗng)

f. Tìm xác suất để biến cố giao xảy ra:

$$\text{Vì } A \cap B = \emptyset \text{ nên } P(A \cap B) = 0\%$$

g. Mô tả biến cố hợp của biến cố A và B:

Biến cố hợp của biến cố A và B là biến cố “một doanh nghiệp Nhà nước có quy mô lao động dưới 300 người hoặc có quy mô lao động từ 500 người trở lên”

$$A \cup B = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_5 \cup X_6$$

h. Tìm xác suất để biến cố hợp xảy ra

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 70\% + 19\% - 0\% = 89\%$$

i. A và B có là các biến cố xung khắc không?

A và B là các biến cố xung khắc vì $P(A \cap B) = 0$

j. A và B có là các biến cố đầy đủ không?

A và B không là các biến cố đầy đủ vì $P(A \cup B) = 89\% \neq 1$

Bài 3: (20 điểm)

Một cuộc điều tra tại một đô thị cho kết quả: 20% dân số dùng một loại sản phẩm A, 50% dân số dùng một loại sản phẩm B, 15% dân số dùng cả hai loại A và B. Chọn ngẫu nhiên một người dân trong đô thị ấy, tìm xác suất để:

a. Người đó dùng sản phẩm A hoặc B.

b. Người đó không dùng sản phẩm A cũng không dùng sản phẩm B.

- c. Người đó chỉ dùng đúng một trong hai loại sản phẩm A hoặc B.
d. Người đó chỉ dùng duy nhất sản phẩm A.

Đáp án bài 3:

Gọi:

X là biến cố "một người dân dùng sản phẩm A" $\Rightarrow P(X) = 20\%$

Y là biến cố "một người dân dùng sản phẩm B" $\Rightarrow P(Y) = 50\%$

- a. Xác suất để người dân chọn ngẫu nhiên dùng ít nhất một trong hai loại sản phẩm A, B:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 20\% + 50\% - 15\% = 55\%$$

- b. Xác suất để người dân chọn ngẫu nhiên không dùng sản phẩm A cũng không dùng sản phẩm B :

$$P(\overline{X \cup Y}) = 1 - P(X \cup Y) = 45\%$$

- c. Gọi X' là biến cố "một người dân chỉ dùng sản phẩm A"

$$\Rightarrow P(X') = P(X) - P(X \cap Y)$$

Gọi Y' là biến cố "một người dân chỉ dùng sản phẩm B"

$$\Rightarrow P(Y') = P(Y) - P(X \cap Y)$$

Xác suất để người dân chọn ngẫu nhiên chỉ dùng đúng một trong hai loại sản phẩm A hoặc B:

$$P(X') + P(Y') = P(X) + P(Y) - 2 P(X \cap Y) = 20\% + 50\% - 15\% * 2 = 40\%$$

- d. Xác suất để người dân chọn ngẫu nhiên chỉ dùng duy nhất sản phẩm A :

$$P(X') = P(X) - P(X \cap Y) = 20\% - 15\% = 5\%$$

Bài 4: (20 điểm)

Trong một cuộc điều tra về sức khỏe của nam giới, người ta thu được bảng dữ liệu về số lượng nam giới phân loại theo tuổi thọ và chiều cao như sau:

(Đơn vị tính: Người)

		Chiều cao			Tổng
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm	
Tuổi thọ	Cao	10	12	16	
	Trung bình	11	10	15	
	Thấp	13	7	6	
Tổng					

- a. Điền các số liệu còn thiếu vào bảng trên và lập bảng xác suất liên kết.
b. Lập bảng cho xác suất có điều kiện: $P(\text{Tuổi thọ} | \text{Chiều cao})$ và $P(\text{Chiều cao} | \text{Tuổi thọ})$
c. Nếu một người nam giới có chiều cao dưới 158cm thì xác suất để người đó có tuổi thọ cao là bao nhiêu?
d. Nếu một người nam giới có tuổi thọ trung bình thì xác suất để người đó có chiều cao trên 164cm là bao nhiêu?

Đáp án bài 4:

a. Hoàn chỉnh bảng số liệu:

		Chiều cao			Tổng
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm	
Tuổi thọ	Cao	10	12	16	38
	Trung bình	11	10	15	36
	Thấp	13	7	6	26
Tổng		34	29	37	100

Bảng xác suất liên kết:

		Chiều cao			Tổng
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm	
Tuổi thọ	Cao	10%	12%	16%	38%
	Trung bình	11%	10%	15%	36%
	Thấp	13%	7%	6%	26%
Tổng		34%	29%	37%	100%

b. Lập bảng cho xác suất có điều kiện: P(Tuổi thọ | Chiều cao)

		Chiều cao		
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm
P(Tuổi thọ Chiều cao)	Cao	10% / 34%	12% / 29%	16% / 37%
	Trung bình	11% / 34%	10% / 29%	15% / 37%
	Thấp	13% / 34%	7% / 29%	6% / 37%
Tổng		34% / 34%	29% / 34%	37% / 34%

Hay:

		Chiều cao		
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm
P(Tuổi thọ Chiều cao)	Cao	29%	41%	43%
	Trung bình	32%	34%	41%
	Thấp	38%	24%	16%
Tổng		100%	100%	100%

Lập bảng cho xác suất có điều kiện: P(Chiều cao | Tuổi thọ)

		P(Chiều cao Tuổi thọ)			Tổng
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm	
Tuổi thọ	Cao	10% / 38%	12% / 38%	16% / 38%	38% / 38%
	Trung bình	11% / 36%	10% / 36%	15% / 36%	36% / 36%
	Thấp	13% / 26%	7% / 26%	6% / 26%	26% / 26%

Hay:

		P(Chiều cao Tuổi thọ)			Tổng
		Trên 164cm	158cm-164cm	Dưới 158cm	
Tuổi thọ	Cao	26%	32%	42%	100%
	Trung bình	31%	28%	42%	100%
	Thấp	50%	27%	23%	100%

c. Nếu một người nam giới có chiều cao dưới 158cm thì xác suất để người đó có tuổi thọ cao là bao nhiêu?

$$P(\text{tuổi thọ cao} | \text{chiều cao dưới 158cm}) = 16\% / 37\% = 43\%$$

d. Nếu một người nam giới có tuổi thọ trung bình thì xác suất để người đó có chiều cao trên 164cm là bao nhiêu?

$$P(\text{chiều cao trên } 164\text{cm} \mid \text{tuổi thọ trung bình}) = 11\% / 36\% = 31\%$$

Bài 5: (20 điểm)

Trong lớp học có 30% sinh viên giỏi, 60% sinh viên khá và 10% sinh viên trung bình. Một kì thi đặc biệt được tổ chức cho tất cả sinh viên. Xác suất không vượt qua được kì thi đối với sinh viên giỏi, khá, trung bình lần lượt là: 0,1; 0,3; 0,5. Kết quả chấm bài thi đầu tiên cho thấy bài thi không vượt qua được yêu cầu của kì thi. Tìm xác suất để bài thi ấy:

- Là bài thi của một sinh viên giỏi.
- Là bài thi của một sinh viên khá.
- Là bài thi của một sinh viên trung bình.

Đáp án bài 5:

Theo đề bài:

$$P(\text{giỏi}) = 30\%$$

$$P(\text{khá}) = 60\%$$

$$P(\text{trung bình}) = 10\%$$

Gọi X là biến cố không vượt qua được yêu cầu của kì thi:

$$P(X \mid \text{giỏi}) = 0,1$$

$$P(X \mid \text{khá}) = 0,3$$

$$P(X \mid \text{trung bình}) = 0,5$$

Cách 1: Dùng công thức Bayes

a. Xác suất để bài thi không vượt qua được yêu cầu của kì thi là bài thi của một sinh viên giỏi:

$$P(\text{giỏi} \mid X) = \frac{P(\text{giỏi}) P(X \mid \text{giỏi})}{P(\text{giỏi}) P(X \mid \text{giỏi}) + P(\text{khá}) P(X \mid \text{khá}) + P(\text{trung bình}) P(X \mid \text{trung bình})} = \frac{30\% \cdot 0,1}{30\% \cdot 0,1 + 60\% \cdot 0,3 + 10\% \cdot 0,5} = \frac{0,03}{0,26} = 11,54\%$$

b. Xác suất để bài thi không vượt qua được yêu cầu của kì thi là bài thi của một sinh viên khá:

$$P(\text{khá} \mid X) = \frac{P(\text{khá}) P(X \mid \text{khá})}{P(\text{giỏi}) P(X \mid \text{giỏi}) + P(\text{khá}) P(X \mid \text{khá}) + P(\text{trung bình}) P(X \mid \text{trung bình})} = \frac{60\% \cdot 0,3}{30\% \cdot 0,1 + 60\% \cdot 0,3 + 10\% \cdot 0,5} = \frac{0,18}{0,26} = 69,23\%$$

b. Xác suất để bài thi không vượt qua được yêu cầu của kì thi là bài thi của một sinh viên trung bình:

$$P(\text{trung bình} \mid X) = \frac{P(\text{trung bình}) P(X \mid \text{trung bình})}{P(\text{giỏi}) P(X \mid \text{giỏi}) + P(\text{khá}) P(X \mid \text{khá}) + P(\text{trung bình}) P(X \mid \text{trung bình})} = \frac{10\% \cdot 0,5}{30\% \cdot 0,1 + 60\% \cdot 0,3 + 10\% \cdot 0,5} = \frac{0,05}{0,26} = 19,23\%$$

Cách 2: Dùng sơ đồ cây

Kí hiệu “Không vượt qua được kì thi” là “Rớt”

Kí hiệu “Vượt qua được kì thi” là “Đậu”

